Math. a. 23

Mathesis. Statica & Mechanica.
A75.

Math. A. 24

Ueber die
Kugel-Bahn
aus dem Französischen
des Herrn Bezout.

Nebst 1. Kupfertafel.

R

Stutgart
bei Johann Benedikt Mezler.
1782.

Bayerische Staatsbibliothek München

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Ich habe Ursache zu glauben, daß der Cours de Mathématiques des Herr Bezout in Teutschland so allgemein bekannt nicht ist, als er es verdienet. Die schöne Abhandlung dieses Gelehrten über die Natur der krummen Linie, welche Kanon-Kugeln und Bomben in ihrer Bahn beschreiben und welche in dem vierten Theil dieses Lehrbegriffs stehet, hat mich veranlaßt, meinen Landsleuten diesen Franzmann vorzuführen.

Für den ehrliebenden Geschüz-Offizier habe ich zuviel Achtung, als daß ich mich unterstünde, hier einen langen Beweis von der Nothwendigkeit zu führen, sich die neuere Theorie der Kugelbahn bekannt zu machen. Ich würde nur dadurch den Mann beleidigen, welcher sich über das handwerksmäßige des Dienstes erhebt und nicht an eisgrauen Vorurtheilen der Unwissenheit kleben bleibt.

Herr Bezout beruft sich in seiner Theorie des Widerstandes sehr oft auf die Theorie der Bewegung der Körper in einem nicht widerstehenden Raum. Weil daher die erstere ohne die leztere etwas unverständlich gewesen seyn würde; so liefere ich hier auch die Bewegung der Körper in einem luftleeren Raum. Vielleicht giebt es immer noch Leute, welche gleich den Blondels und Belidors in ihre Lieblings-Hypothese, die para-

parabolische Theorie der Kugel-Bahn verliebt sind. Solchen heterodoxen Artilleristen sagt Herr Bezout noch einmal und zwar sehr nachdrüklich, daß sie sich gewaltig in ihren Meinungen betrugen.

Da diese Abhandlung wegen den häufigen Vergleichungen, welche Herr Bezout zwischen Theorie und Erfahrung anstellt, für andern Abhandlungen dieser Art, deren Verfasser solches unterlassen haben, einen Vorzug hat; so schiene mir dieser Umstand einen Bewegungs-Grund abzugeben, welcher diese Abhandlung einer weitern Bekanntmachung auch in Teutschland, würdig machen konnte.

Ich habe es gewagt, einige wenige Anmerkungen hinzuzufügen, welche theils den Text erläutern, theils Anwendungen dieser Theorie auf andere dahin einschlagende Aufgaben sind.

Meine Absicht bei Bekanntmachung dieser kleinen Arbeit ist, diese Abhandlung über die Kugelbahn denjenigen in die Hände zu geben, welche den Cours de mathématiques des Herrn Bezout nicht besitzen, und meine Begierde dem Stande, in welchem ich die Ehre habe, zu dienen, auf irgend eine Art nüzlich zu seyn, einigermassen zu befriedigen.

Der Uebersetzer.

Von

Von der Bewegung der Kanon-Kugeln in einem luftleeren Raum.

§. 1.

Wenn ein Körper nach einer beliebigen Richtung *AB* in einem luftleeren oder nicht widerstehenden Raum bewegt wird und zu gleicher Zeit der Würkung der Schwere nicht ausgesezt ist; so wird er sich ununterbrochen mit einer und eben derselben Geschwindigkeit nach dieser Richtung fortbewegen. *Fig.* 1.

Wenn aber die Schwere auf ihn würket; so bewegt er sich nur während einem unendlich kleinen Zeittheilchen nach der Richtung *AB*. Die Würkung der Schwere und die dem Körper anfänglich mitgetheilte Geschwindigkeit verändern die Richtung und die Geschwindigkeit des Körpers in jedem Zeittheilchen, und verursachen, daß der Körper in seiner Bewegung eine krumme Linie beschreibt, deren Tangente im Punkt *A*, wo die Bewegung des Körpers anfangt, die anfängliche Richtung *AB* desselben ist.

Wenn man sich eine richtige Vorstellung von der Art machen will, wie der Körper in diesem Fall bewegt werde, so nehme man an, es sey *ACD* die

die Bahn des Körpers, und er befinde sich gegenwärtig in dem Punkt F dieser Linie. Es sey der unendlich kleine Bogen EF der Raum, welchen der Körper während einem Zeittheilchen durchlauffen kann; man verlängere die Linie EF, welche man als eine gerade Linie betrachten kann, um die Grösse $Fg = EF$; so erhellet, daß der Körper in eben dem Zeittheilchen die Linie Fg durchlauffen würde, in welchem er die Linie EF beschrieben hat, wofern weder die Schwere, noch irgend eine andere äussere Kraft auf ihn würket. Weil aber die Schwere auch auf den Körper würket, und man deßwegen annehmen kann, der Körper bewege sich während einem eben so grossen Zeittheilchen durch die Vertical-Linie Fi, wenn die Schwere allein würkte; so sieht man, daß, wann der Körper im Punkt F angekommen ist, wo die beide Kräfte Fg, Fi auf ihn würken, er die Diagonal-Linie FK des Parallelogramms $Fg\,Ki$ beschreiben würde, welches man auf den Seiten Fg, Fi verzeichnen kann. Auf solche Art verändert sich die Richtung und die Geschwindigkeit des Körpers in jedem Zeittheilchen.

§. 2.

Obgleich man die Eigenschaften der krummen Linie, welche ein geworfener Körper durch seine Bewegung beschreibt, leicht aus dieser Art, die Bewegung desselben zu betrachten, herleiten könnte; so erwählen wir doch einen andern Weg, um zu eben dem Zwecke zu gelangen, weil auf dem ersten Weg einige Integrationen vorkommen, und verfahren nach folgender leichten Methode.

§. 3.

Wenn wir die Schwere des Körpers bei Seite setzen, dabei aber annehmen, daß die Linie *AB*, nach deren Richtung sich der Körper bewegt, zu gleicher Zeit parallel mit sich selbst, nach verticaler Richtung und nach den Gesetzen des Falls schwerer Körper heruntersteige; so beschreibt der Körper dannoch eben die Linie, welche er beschreiben wird, wenn man die Schwere nicht bei Seite sezt. Denn er ist in jedem Zeittheilchen um eben die Grösse von der Linie *AB* entfernt, um welche er wegen Würkung der Schwere in jedem Zeittheilchen entfernt seyn muß. Nun wollen wir annehmen, die Linie *AC* bezeichne die Wurfs Geschwindigkeit oder den Raum, welchen der Körper in einer Sekunde durchlauffen würde, wenn die Kraft, welche ihn in Bewegung sezt, allein auf ihn würkte. Ferner sey *AP* der Raum, welchen ein freyfallender Körper, auf welchen die Schwerkraft würket, in einer Sekunde durchläuft. Man ziehe *PD* parallel mit *AB*. Nach unserer Voraussetzung ist also die Linie *AB* in einer Sekunde nach *PD* verrükt worden, wenn der Körper auf der Linie *AB* den Raum *AC* in einer Sekunde durchlauffen hat. Zieht man nun *CM* mit *AP* parallel; so ist *M* der Punkt, wo sich der Körper nach Verfluß der ersten Sekunde befindet. *Fig. 2.*

Wenn wir nun *AB* noch einmal so groß als *AC* annehmen; so erhellet, daß der Körper, dessen Schwere man nicht in Betrachtung zieht, nach Verfluß zweier Sekunden sich im Punkt *B* befindet. Und wenn wir auf der Vertical-Linie *AP* die Grösse *AP'* viermal grösser, als *AP* annehmen; so ist

AP' die Grösse, um welche sich die Richtungs-Linie AB nach zwei Sekunden gesenkt hat. Zieht man also die Linien BM' und PM' parallel mit AP und AB; so ist M' der Punkt, in welchem sich der Körper nach Verfluß zweier Sekunden befindet.

Auf eben die Art beweißt man, daß, wenn AO dreimal so groß als AC und AP'' neunmal so groß als AP angenommen wird, und man die Linien OM'', $P''M''$ mit AP und AB parallel zieht, M'' der Punkt seye, in welchem sich der Körper nach Verfluß dreier Sekunden befindet.

Nun erhellet aus dieser Verzeichnung

1) daß sich die Linien AP'', AP', AP wie die Quadrate der Zeiten verhalten.

2) Daß sich die Linien AC, AB, AO oder die ihnen gleiche Linien PM, $P'M'$ und $P''M''$ verhalten wie die Zeiten. Demnach verhalten sich die Linien AP, AP', AP'' wie die Quadrate der korrespondirenden Linien PM, PM', PM''. Hieraus und aus dem, was von den Eigenschaften der Kegelschnitte bekannt ist, erhellet also, daß der Körper in seiner Bahn eine Parabel beschreibe, weil sich die Quadrate der mit der Tangente AB parallelen Ordinaten PM, $P'M'$ u. s. w. wie die korrespondirende Abscissen AP, AP' u. s. w. verhalten.

Damit man im Stande ist, die übrige Eigenschaften dieser krummen Linie mit Leichtigkeit herzuleiten, ist es nothwenig, die vorhergehende Verzeichnung auf eine allgemeinere Art auszudrucken.

§. 4.

In dieser Absicht wollen wir annehmen, *AE* sey die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers oder die Anzahl Schue, welche der Körper in jeder Sekunde durchlauffen würde, wenn er diese Geschwindigkeit beibehielte. Man zerlege dieselbe in zwo andere, davon die Richtung *AD* der einen horizontal und die Richtung *AF* der andern vertical ist. Weil die Richtung der Schwere vertical oder senkrecht auf *AP* ist; so wird die Geschwindigkeit *AD* von der Schwere weder vermehret, noch vermindert, und da vermöge der Voraussetzung, keine äussere Kraft da ist, welche die horizontale Geschwindigkeit des Körpers vermindern könnte; so bewegt sich der Körper in jedem Punkt seiner Bahn mit seiner anfänglichen horizontalen Geschwindigkeit. *Fig.* 3.

Was aber die Geschwindigkeit nach der Richtung *AF* betrifft; so muß man bemerken, daß, wenn der Körper vermöge seiner mit dem Horizont parallelen Geschwindigkeit einen Raum = *AP* durchlauffen hat, er sich nicht mehr auf eben der Höhe befinden könne, auf welcher er sich ohne die Würkung der Schwere befunden haben würde, sondern in einem etwas niederer liegenden Punkt *M* eben der Vertical-Linie *PN* seyn müsse. Denn da die Geschwindigkeit des Körpers nach verticaler Richtung der Richtung, nach welcher die Schwere würket, gerade entgegengesezt ist; so muß der Raum, welchen er vermöge dieser verticalen Geschwindigkeit durchlauffen würde, nothwendiger Weise um den Raum vermindert werden, welchen ein Körper wegen der Würkung der Schwere in eben dieser Zeit durchlauffen würde.

Es sey also V die dem Körper nach der Richtung AZ mitgetheilte Geschwindigkeit oder der Raum, welchen der Körper vermöge dieser Geschwindigkeit in jeder Sekunde gleichförmig durchlauffen könnte, und t die Zeit, in welcher sich der Körper vom Punkt A bis in den beliebigen Punkt N bewegen kann; so ist $AN = Vt$.

Wenn p die Geschwindigkeit bezeichnet, welche die Schwere in einer Sekunde mittheilen kann; so ist $\frac{pt^2}{2}$ der Raum, welchen der Körper in der in Sekunden angegebenen Zeit t durchlauffen kann. Ist also M der Punkt, wo der Körper nach Verfluß der Zeit t ankommt; so ist $NM = \frac{1}{2}pt^2$.

Durch den Punkt A ziehe man die Vertical-Linie AX und durch den Punkt M die Linie MQ parallel mit der Tangente AZ. Es sey $AQ = x'$; $QM = AN = y'$; so erhalten wir $x' = NM = \frac{1}{2}pt^2$ und $y' = Vt$. Man suche aus dieser lezten Gleichung den Wert von t, um ihn in die erste Gleichung zu setzen; so erhält man $x' = \frac{\frac{1}{2}py'^2}{V^2}$ oder $\frac{V^2x'}{\frac{1}{2}p} = y'^2$. Nun ist aber $\frac{V^2}{2p}$ die Höhe, von welcher ein schwerer Körper fallen müste, um die Geschwindigkeit V zu erlangen. Ist also h diese Höhe; so hat man $\frac{V^2}{2p} = h$ und $\frac{V^2}{\frac{1}{2}p} = 4h$, woraus folgt $4h\,x' = y'^2$.

Ein jeder Punkt der krummen Linie AMC hat demnach die Eigenschaft, daß das Quadrat der Ordinate y' oder QM, welche mit der Tangente AZ

paral-

parallel ist, dem Produkt aus der Abscisse AQ in eine beständige Linie $4h$ gleich ist. Die krumme Linie AMC ist mithin eine Parabel, deren Durchmesser die Vertical-Linie AX, deren Parameter aber das Vierfache der zu der anfänglichen Geschwindigkeit des Körpers gehörigen Höhe ist, und wo der Winkel AQM, welchen die Ordinaten mit dem Durchmesser AX einschliessen, die Ergänzung des Winkels ZAC oder des Erhöhungs-Winkels des Mörsers ist. Kennt man die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers und den Erhöhungs-Winkel des Stüks; so kann man diese krumme Linie leicht verzeichnen.

§. 5.

Wir wollen nunmehr die Abscissen-Linie auf der Horizontal-Linie AC annehmen und die Ordinaten MP auf dieselbe senkrecht ziehen.

Es sey $AP = x$, $PM = y$ und a der Erhöhungs-Winkel ZAC. Aus dem rechtwinklichten Dreyek APN erhalten wir die Proportion:

$1 : AN = \text{Sin.}\, NAP : PN = \text{Cos.}\, NAP : AP$, woraus folgt $PN = Vt\ \text{Sin.}\ a$ und $AP = Vt\ \text{Cos.}\ a$. Weil nun $MN = \frac{1}{2}pt^2$, wie wir oben gesehen haben; so ist $PM = Vt\ \text{Sin.}\ a - \frac{1}{2}pt^2$. Dadurch erhalten wir also $x = Vt\ \text{Cos.}\ a$ und $y = Vt\ \text{Sin.}\ a - \frac{1}{2}pt^2$. Man suche aus der ersten Gleichung den Wert von t und setze ihn in die zweite; so erhält man

$4hy\ \text{Cos.}^2\ a = 4hx\ \text{Sin.}\ a\ \text{Cos.}\ a - xx$, wenn man statt $\frac{V^2}{\frac{1}{2}p}$ seinen Wert $4h$ nimmt. Und aus dieser Gleichung leiten wir folgende Eigenschaften her.

§. 6.

Da die dem Körper mitgetheilte Geschwindigkeit nur von endlicher Grösse seyn kann; so muß ihre Würkung auf den Körper nach verticaler Richtung nach Verfluß einer gewissen Zeit von der Schwere aufgehoben werden, dergestalt, daß der Körper in irgend einem Punkt *B* seiner Bahn aufhört zu steigen und anfangt herunter zu fallen. Wir sehen hieraus, daß der niedersteigende Ast *BC* eben die Eigenschaften habe, wie der aufsteigende Ast *AB* und der Körper daher, nach Verfluß einer gewissen Zeit, wieder in einem Punkt *C* des Horizonts ankommen müsse.

§. 7.

Wenn man die Linie *AC*, welche man die **Schußweite** nennt, finden will; so sieht man leicht, daß man nur $y = 0$ setzen dörfe. Dadurch erhält man also

$4hx \text{ Sin. } a \text{ Cos. } a - xx = 0$ und demnach $x = 0$, $x = 4h \text{ Sin. } a \text{ Cos. } a$.

Der erste Wert von x zeigt den Punkt *A* und der zwote die Linie *AC* an, welche man durch Zeichnung finden kann, wenn man *XA* um $AK = 4h$ verlängert; von dem Punkt *K* die Senkrechte *KL* auf *AZ* zieht, so wie vom Punkt *L* die Senkrechte *LC* auf *AC*. Denn dadurch erhält man $AC = 4h \text{ Sin. } a \text{ Cos. } a$.

Ist also die anfängliche Geschwindigkeit und der Erhöhungs-Winkel des Stüks gegeben; so kann man leicht die Schußweite finden.

Wenn man zum Beyspiel die Schußweite einer Parabel finden wollte, welche ein Körper beschreibt,

dessen anfängliche Geschwindigkeit 150 Fuß in einer Sekunde beträgt, und welcher unter einem Winkel von 36° abgeschossen worden ist; so findet man die der Geschwindigkeit zugehörige Höhe $h = \frac{(150)^2}{2 \times 30,2}$ $= 372,5$ Fuß, und da der Sinus von 36°, $= 0, 5878$ und der Cosinus, $= 0, 809$, wenn der Halbmesser $= 1$; so ist $AC = 4h$ Sin. a Cos. a $= 1490 \times 0, 5878 \times 0, 809 = 708, 6$ Fuß. Daher fällt der Körper in einer Entfernung von 709 Fuß vom Punkt A wieder auf den Boden.

§. 8.

Der Wert von $AC = 4h$ Sin. a Cos. a verändert sich nicht, wenn man statt des Winkels a seine Ergänzung sezt, weil im lezten Fall $AC = 4h$ Cos. a Sin. a. Nun sind die beide Winkel a und $90 - a$ gleich weit von 45° entfernt. Man erhält also, bei gleicher Ladung, gleich grosse Schußweiten, wenn die Erhöhungs-Winkel gleich weit von 45° entfernt sind.

§. 9.

Aus der Gleichung $AC = 4h$ Sin. a Cos. a erhellet ferner, daß von 0. Grad bis zu 45° die Schußweiten immer wachsen; von 45 bis 90° aber immer abnehmen. Denn die Werte von a über 45° sind die Ergänzungen der Werte von a unter 45°. Bei einerlei Ladung erhält man also unter einem Winkel von 45° die gröste Schußweite.

§. 10.

Weil in diesem Fall der Winkel $a = 45°$; der Sinus und Cosinus dieses Winkels aber einan-

der gleich und ein jeder $= \sqrt{\frac{1}{2}}$, wenn der Halbmesser $= 1$; so ist die Schußweite $AC = 4h \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = 4h \times \frac{1}{2} = 2h$. Die größte Schußweite ist also das doppelte der zu der anfänglichen Geschwindigkeit des Körpers gehörigen Höhe.

§. 11.

Wenn wir uns der Differenzial-Rechnung bedienen wollen; so können wir die in dem vorigen §phen gefundene Wahrheit auch folgendergestalt darthun. Man muß nemlich den Wert von AC so differenziiren, daß man h als eine beständige Grösse, den Winkel a aber als eine veränderliche Grösse betrachtet, und dieses Differenziale $= 0$ setzen. Dadurch erhält man also

$$4h \text{ Cos.}^2 a - 4h \text{ Sin.}^2 a = 0,$$

woraus folgt

$$\frac{\text{Sin.}^2 a}{\text{Cos.}^2 a} = 1 = \text{Tang.}^2 a$$ und mithin auch Tang. $a = 1$. Die Tangente des gesuchten Winkels ist also dem Halbmesser gleich und der Winkel selbst $= 45°$.

§. 12.

Wenn wir mit einer hinlänglichen Genauigkeit die Geschwindigkeit bestimmen könnten, welche eine gewisse Pulverladung einem Körper mittheilen könnte; so könnte man aus der obigen Formel die Schußweiten unmittelbar finden. Den Mangel dieser Kenntniß ersezt ein einiger Versuch, vermittelst dessen und der obigen Säze man die Schußweiten, bei einerlei Ladung, unter jedem Erhöhungs-Winkel findet.

Wenn ein Körper, durch die ausdehnende Kraft des entzündeten Pulvers einer Ladung, deren Grösse gegeben ist, unter einem bekannten Erhöhungs-Winkel abgeschossen wird und man die Schußweite mißt; so kann man daraus leicht den Wert von h bestimmmen. Wenn nehmlich diese Schußweite mit b' und der Erhöhungs-Winkel mit a' bezeichnet wird; so ist $b' = 4h$ Sin. a' Cos. a' und $h = \frac{b'}{4 \text{ Sin. } a' \text{ Cos. } a'}$.

Diesen Wert von h setze man in den Wert von AC, welchen wir mit b bezeichnen wollen; so ist

$$b = \frac{b' \text{ Sin. } a \text{ Cos. } a}{\text{Sin. } a' \text{ Cos. } a'}$$

woraus folgt

$$b : b' = \text{Sin. } a \text{ Cos. } a : \text{Sin. } a' \text{. Cos. } a' \text{.}$$

und die Schußweiten unter verschiedenen Erhöhungs-Winkeln, bei einerlei Ladung, verhalten sich wie die Produkte der Sinus in die Cosinus der Erhöhungs-Winkel.

§. 13.

Aus der Geometrie ist bekannt, daß Sin. a Cos. $a = \frac{1}{2}$ Sin. $2a$, woraus folgt $b : b' =$ Sin. $2a$: Sin. $2a'$. Die Schußweiten verhalten sich demnach wie die Sinus der doppelten Erhöhungs-Winkel.

§. 14.

Die Schußweite unter einem Erhöhungs-Winkel von 45° ist diejenige, mit welcher man gewöhnlich alle andere Schußweiten vergleicht. Weil nun für diesen Winkel Sin. $2a = 1$; so ist $b : b' = 1 :$

Sin.

Sin. $2a'$ und mithin $b' = b$ Sin. $2a'$. Die Schußweite unter einem jeden Winkel ist also dem Produkt aus der Schußweite unter einem Winkel von 45° in den Sinus des doppelten Erhöhungs-Winkels, unter welchem man die Schußweite sucht, gleich.

§. 15.

Gewöhnlich erwählt man einen Erhöhungs-Winkel von 45°, wenn man die Stärke des Pulvers untersuchen will, und dazu hat man einen guten Grund. Denn wenn der Erhöhungs-Winkel $= 45°$ ist; so hat der Fehler, welchen man in Messung desselben begehen kann, den kleinsten, nachtheiligen Einfluß auf die Schußweite.

Wenn man annimmt, man fehle in der Gleichung $b = 4h$ Sin. a Cos. a bei dem Maaß des Winkels a um die Grösse x und man den Fehler wissen will, der dadurch in der Schußweite b begangen wird; so wollen wir annehmen: a sey der wahre Erhöhungs-Winkel und x, die Grösse, um welche er zu groß gemessen worden ist. Ferner sey z der Fehler, welcher dadurch in der Schußweite begangen wird; so erhalten wir

$$b + z = 4h \text{ Sin. } (a + x) \text{ Cosin. } (a + x).$$

Nun ist

$$\text{Sin. } (a + x) = \text{Sin. } a \text{ Cos. } x + \text{Sin. } x \text{ Cos. } a$$
$$\text{Cos. } (a + x) = \text{Cos. } a \text{ Cos. } x - \text{Sin. } a \text{ Sin. } x$$

woraus folgt

$$b + z = 4h \left[\text{Sin. } a \text{ Cos. } a \text{ Cos.}^2 x + \text{Sin. } x. \text{ Cos. } x \; \text{Cos.}^2 a - \text{Sin.}^2 a \text{ Sin. } x \text{ Cos. } x - \text{Sin. } a \text{ Cos. } a. \text{ Sin.}^2 x\right]$$

und

und

$$z = 4h \left[\text{Sin.}\, a\, \text{Cos.}\, a\, \text{Cos.}^2 x + \text{Sin.}\, x\, \text{Cos.}\, x\, \text{Cos.}^2 a - \text{Sin.}\, a\, \text{Cos.}\, a - \text{Sin.}^2 a\, \text{Sin.}\, x\, \text{Cosin.}\, x - \text{Sin.}\, a\, \text{Cos.}\, a.\, \text{Sin.}^2 x \right]$$

Aber $\text{Sin.}\, a\, \text{Cos.}\, a = \frac{1}{2}\text{Sin.}\, 2a$
und $\text{Sin.}\, x\, \text{Cos.}\, x = \frac{1}{2}\, \text{Sin.}\, 2x$

Daher

$$z = 4h \left[\tfrac{1}{2}\text{Sin.}\, 2a\, \text{Cos.}^2 x + \tfrac{1}{2}\, \text{Sin.}\, 2x\, \text{Cos.}^2 a - \tfrac{1}{2}\text{Sin.}\, 2a - \tfrac{1}{2}\text{Sin.}\, 2x\, \text{Sin.}^2 a - \tfrac{1}{2}\text{Sin.}\, 2a\, \text{Sin.}^2 x \right]$$

oder

$$z = 4h \left[\tfrac{1}{2}\text{Sin.}\, 2a\, (\text{Cos.}^2 x - \text{Sin.}^2 x - 1) + \tfrac{1}{2}\text{Sin.}\, 2x\, (\text{Cos.}^2 a - \text{Sin.}^2 a) \right]$$

Je kleiner der Unterschied zwischen Sin. a und Cos. a ist; desto kleiner ist auch z. Je mehr sich aber der Erhöhungs-Winkel dem Winkel von 45° nähert; desto mehr nähern sich auch Sin. a und Cos. a, und unter einem Erhöhungs-Winkel von 45° ist Sin. a = Cos. a; daher

$$z = 4h \left[\tfrac{1}{2}\, (\text{Cos.}^2 x - \text{Sin.}^2 x - 1) \right]$$

oder

$$z = 2h\, (\text{Cos.}^2 x - \text{Sin.}^2 x - 1)$$

kleiner als alle vorhergehende und nachfolgende z.

§. 16.

Nun wollen wir auch die Schußweite im Kern-Schuß berechnen. Das Kanon muß demnach so gerichtet seyn, daß die Richtungslinie *CD* horizontal ist. Die nach der Richtung *ABG* der Axe abgeschossene Kugel beschreibt eine Parabel *BLKF*, welche die verlängerte Richtungs-Linie in zwey Punkten *L* und *F* schneidet, davon der erste nahe am *Fig.* 4.

am Kanon liegt und der andere F weiter davon entfernt ist. Denn die Kugel, welche in dem unter der Richtungs-Linie sich befindenden Punkt B aus der Mündung fährt, erhebt sich in ihrer Bahn erst über diese Linie und schneidet dieselbe wieder in dem Punkt F. Man muß also die horizontale NF oder BM zu bestimmen suchen. FM ist eine Vertical-Linie.

Es sey a der Winkel, welchen die Richtungs-Linie mit der Axe einschließt; c die Entfernung der Axe von dem höchsten Punkt D der Kopffrießen; so findet man, wenn man die Senkrechte BN zieht, $DN = c$ Sin. a und $BN = FM = c$ Cosin. a; der Winkel GBM, der Erhöhungs-Winkel des Kanons, ist dem Winkel BLD und mithin auch dem Winkel a gleich. Da nun überhaupt

$$4hy \text{ Cos.}^2 a = 4hx \text{ Sin. } a \text{ Cosin. } a - xx$$

die Gleichung der krummen Linie BKF ist; so sieht man leicht, daß man BM finde, wenn man in diese Gleichung statt y seinen Wehrt $FM = c$ Cosin. a sezt und alsdenn x sucht. Dadurch erhält man

$$4hc \text{ Cos.}^3 a = 4hx \text{ Cos. } a \text{ Sin. } a - xx$$

und

$$x = 2h \text{ Sin. } a \text{ Cos. } a \pm \surd\ (4h^2 \text{ Sin.}^2 a \text{ Cos.}^2 a - 4hc \text{ Cos.}^3 a)$$

Weil aber der Winkel a sehr klein ist; so ist der Unterschied zwischen dem Cosinus und dem Halbmesser nicht sehr groß. Man kann also schreiben

$$x = 2h \text{ Sin. } a \pm \surd\ (4h^2 \text{ Sin.}^2 a - 4hc)$$

$$= 2h \text{ Sin. } a \pm 2h \text{ Sin. } a \surd \left(1 - \frac{c}{h \text{ Sin.}^2 a}\right)$$

Nun

Nun ist h in Vergleichung mit den Ausmessungen des Kanons eine beträchtliche Grösse, mithin $\frac{c}{h \text{ Sin.}^2 a}$ sehr klein, und man kann statt $\sqrt{\left(1 - \frac{c}{h \text{ Sin.}^2 a}\right)}$ den hinlänglich genauen Wert $1 - \frac{c}{2h \text{ Sin.}^2 a}$ nehmen, wodurch man erhält

$$x = 2h \text{ Sin. } a \pm 2h \text{ Sin. } a \left(1 - \frac{c}{2h \text{ Sin.}^2 a}\right)$$

woraus folgt

$$x = 4h \text{ Sin. } a - \frac{c}{\text{Sin. } a} \text{ und } x = \frac{c}{\text{Sin. } a}$$

davon der lezte Wert die Weite *BO* und der erste die Weite *BM* oder die Schußweite im Kern-Schuß anzeigt.

Wenn wir in die Gleichung

$$x = 4h \text{ Sin. } a - \frac{c}{\text{Sin. } a}$$

den oben gefundenen Wert von h setzen, so erhalten wir für die Schußweite des Kernschusses

$$x = 2b \text{ Sin. } a - \frac{c}{\text{Sin. } a}$$

wo nehmlich b die Schußweite unter einem Erhöhungswinkel von 45° bezeichnet.

Für einen 12Pfündter, dessen Schußweite unter einem Erhöhungs-Winkel von 45° ohngefehr 1800 Toißen beträgt, dessen Axe mit der horizontalen Richtungs-Linie einen Winkel von 0°, 58′ einschließt (*) und wo endlich $c = 4''$, $926 = 0'$, $4105 = 0$ Tois, 0684 findet man

$x =$

$$x = 3600 \times \text{Sin. } 0°, 58' - \frac{0, 0684}{\text{Sin. } 0°, 58'}$$

$$= 3600 \times 0, 01687 - \frac{0, 0684}{0, 01687}$$

$= 57$ Toißen, ohngefehr.

Diese Schußweite ist von der durch Versuche gefundenen Schußweite des Kern-Schusses, unter eben den Umständen, sehr verschieden, wie es denn auch, vermöge unsers Verfahrens bei der Berechnung derselben nicht anders seyn kann. Denn die Schußweite von 1800 Toißen unter dem Erhöhungs-Winkel von 45°, welche wir bei der Berechnung des Kernschusses zum Grunde gelegt haben, ist weit kleiner, als sie in einem luftleeren Raum seyn würde, und die parabolische Theorie darf bei solchen beträchtlich grossen Schußweiten gar nicht mehr angewendet werden. Davon werden wir bald den ausführlichen Beweis sehen.

Fig. 5. (*) Es sey *H* der höchste Punkt der Kopffriessen „eines 12Pfünders. Wenn man *HI* mit der „Axe *AB* parallel zieht; so ist der Winkel „*GHI* dem Winkel *GCA* gleich, welchen die „Richtungs-Linie mit der verlängerten Axe „einschließt. Sind in dem rechtwinklichten „Dreiek *GIH* die Seiten *GI* und *HI* bekannt; „so findet man den Winkel *GHI* leicht aus der „Proportion

$$IH : IG = R : \text{Tang. } GHI.$$

„Bei dem Zwölfpfünder ist aber

$AG = 6$ Zoll, 231

$BH = 4,$ 926

„Daher $GI = 1,$ 305

„Ferner $HI = 77,$ 254

„wor-

„woraus folgt

$77,254 : 1,305 = 77254 : 1305 = R$: Tang. GHI.

„Daraus findet man $GHI = 0°, 58'$.

§. 17.

Weil in der Gleichung

$4hy \, \text{Cos.}^2 a = 4hx \, \text{Sin.} \, a \, \text{Cos.} \, a - xx$ Fig. 6.

vier Größen enthalten sind, so kann man vermittelst derselben vier verschiedene Aufgaben auflösen, wenn drey Größen gegeben sind. Von diesen Aufgaben wollen wir nur die folgende betrachten:

Wenn die Kraft des Pulvers, die horizontale Entfernung eines Gegenstandes von unserer Batterie und die verticale Höhe dieses Gegenstandes gegeben sind; so soll man den Erhöhungs-Winkel finden, den man dem Mörser geben muß, um diesen Gegenstand treffen zu können.

Es sey M dieser Gegenstand. Man denke sich die Vertical-Linie MP. Die Entfernung AP und den Winkel MAP nimmt man als bekannt an. Es sey also der Winkel $MAP = b$ und die Entfernung $AP = c$, wodurch man erhält $MP = \frac{c \, \text{Sin.} \, b}{\text{Cosin.} \, b}$.

In dem Punkt M ist also $x = c$ und $y = \frac{c \, \text{Sin.} \, b}{\text{Cosin.} \, b}$.

Diese Werte setze man in die obige Gleichung; so erhält man

$4h \, \text{Sin.} \, b \, \text{Cos.}^2 a = 4h \, \text{Sin.} \, a \, \text{Cos.} \, a \, \text{Cos.} \, b - c \, \text{Cos.} \, b$

Es ist aber

$\text{Cosin.} \, 2a = \text{Cos.} \, a \, \text{Cos.} \, a - \text{Sin.} \, a . \, \text{Sin.} \, a = \text{Cos.}^2 a - \text{Sin.}^2 a = \text{Cos.}^2 a - 1 + \text{Cos.}^2 a =$

 2 Cos.

$2\,\mathrm{Cos.}^2 a - 1$ und demnach

$$\mathrm{Cos.}^2 a = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cosin.}\ 2a.$$

Ferner

$$\mathrm{Sin.}\ 2a = 2\,\mathrm{Sin.}\ a\ \mathrm{Cos.}\ a\ ;\ \text{mithin}$$

$$\mathrm{Sin.}\ a\ \mathrm{Cos.}\ a = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin.}\ 2a$$

Wenn diese Werte in die leztgefundene Gleichung gesezt werden; so erhält man

$$2h\ \mathrm{Sin.}\ b + 2h\ \mathrm{Sin.}\ b\ \mathrm{Cosin.}\ 2a = 2h\ \mathrm{Sin.}\ 2a\ \mathrm{Cosin.}\ b - c\ \mathrm{Cosin.}\ b$$

oder

$$2h\ \mathrm{Sin.}\ 2a\ \mathrm{Cosin.}\ b - 2h\ \mathrm{Sin.}\ b\ \mathrm{Cosin.}\ 2a = 2h\ \mathrm{Sin.}\ b + c\ \mathrm{Cosin.}\ b$$

oder

$$2h\ \mathrm{Sin.}\ (2a - b) = 2h\ \mathrm{Sin.}\ b + c\ \mathrm{Cosin.}\ b$$

Endlich

$$\frac{2h}{\mathrm{Cosin.}\ b} \cdot \mathrm{Sin.}\ (2a - b) = 2h\ \frac{\mathrm{Sin.}\ b}{\mathrm{Cosin.}\ b} + c$$

welches folgende Verzeichnung giebt.

Man ziehe auf *AM* die unbestimmte Linie *AE* senkrecht. Aus der Mitte *D* der Linie $AK = 4h$ ziehe man auf *AK* die Senkrechte *DE*, welche *AE* in einem beliebigen Punkt *E* schneidet, aus welchem man mit dem Halbmesser *AE* den Bogen *ANN'K* beschreibt. Man verlängere *PM* bis diese Linie den Bogen in den Punkten *N* und *N'* schneidet und ziehe die Linien *ANZ*, *AN'Z'*; so sind solches die Richtungs-Linien, nach welchen ein Körper mit einer der Höhe *h* zugehörigen Geschwindigkeit geworfen werden muß, wenn er den Gegenstand *M* treffen soll.

Denn es erhellet leicht, daß der Winkel *EAD* des rechtwinklichten Dreyeks *ADE* dem Winkel *MAP* gleich

gleich seyn muß. Weil $AD = 2h$; so ist $ED = \frac{2h \text{ Sin. } b}{\text{Cosin. } b}$ und weil $AP = c$; so ist $ED + AP =$

$$EI = \frac{2h \text{ Sin. } b}{\text{Cosin. } b} + c$$

Mithin

$$\frac{2h \text{ Sin. } (2a - b)}{\text{Cosin. } b} = EI$$

Aus eben dem Dreyek ADE findet man auch $AE = \frac{2h}{\text{Cosin. } b}$. Demnach ist

$$AE \text{ Sin. } (2a - b) = EI.$$

Den Bogen KNA verlängere man, bis er in G die Vertical-Linie GE schneidet, und ziehe aus den Punkten N und N' die Senkrechten NL, $N'L'$ auf eben diese Linie. Aus dem rechtwinklichten Dreyek NEL erhält man $NE : NL$ oder $AE : EI = 1 :$ Sin. NEG und mithin $AE \times$ Sin. $NEG = EI$. Es ist also auch Sin. $(2a - b) =$ Sin. NEG und $2a - b = NEG = NEA + b$, daher $a = \frac{1}{2} NEA + b$. Weil aber NAM ein Winkel ist, dessen Spitze in der Peripherie liegt und AM eine Tangente ist; so erhalten wir $NAM = \frac{1}{2} NEA$, und da ferner $MAP = b$; so ist $a = NAM + MAP = NAP$. Mithin leistet der Punkt N der Aufgabe ein Genüge.

Auf eben die Art beweißt man auch, daß der Punkt N' der Aufgabe ein Genüge leiste. Weil nehmlich aus dem rechtwinklichten Dreyek $N'EL'$ die Proportion folgt

$N'E : N'L'$ oder $AE : EI = 1 :$ Sin. $N'EL' = 1 :$ Sin. $N'EG$; so ist AE Sin. $N'EG = EI$

 und

und mithin Sin. $(2a - b) = $ Sin. $N'EG$; daher $2a - b = N'EG = N'EA + b$ und $a = \frac{1}{2} N'EA + b = N'AM + MAP = N'AP$.

Wenn der Gegenstand unter der Horizontal-Linie der Batterie liegt; so muß b verneint angenommen werden.

§. 18.

Mit einer und eben derselben Ladung kann man also eine Bombe immer nach zweierlei Richtungen auf einen Gegenstand werfen, wofern nur AP nicht grösser als DR ist. Die Richtung AN' ist in dem Fall zu gebrauchen, wenn man Gebäude oder andere Gegenstände mit Bomben zerschmettern will: Der Richtung AN kann man sich aber zum **ricochettiren** bedienen.

§. 19.

Wir wollen nunmehr auch noch die Zeit bestimmen, welche die Kugel braucht, um an den verlangten Gegenstand zu kommen.

Aus der Gleichung $x = Vt$ Cosin. a finden wir den kurzen Ausdruk

$$t = \frac{x}{V \text{Cos.} a}$$

Setzen wir statt x den Wert c und statt V den Wert $\sqrt{(2ph)}$; so finden wir

$$t = \frac{c}{\text{Cos.} a \sqrt{(2ph)}}$$

Nun haben wir oben gesehen, wie man h durch Versuche finden könne, und es ist genugsam bekannt, daß $p = 30{,}2$ Fuß seye.

Die

Die Bestimmung der Zeit, während welcher sich die Kugel bewegt, um an den verlangten Gegenstand zu kommen, kann dazu dienen, die Brandröhren der Bomben einzurichten.

§. 20.

Endlich kann man auch die gröste Höhe *DB* Fig. 3. bestimmen, auf welche die Bombe in ihrer Bahn steigt. Man differenziire nehmlich die Gleichung

$$4hy \operatorname{Cos.}^2 a = 4hx \operatorname{Cos.} a \operatorname{Sin.} a - xx$$

so, daß man nur y und x als veränderlich betrachtet und setze $\frac{dy}{dx} = 0$; so erhält man

$$4h \operatorname{Sin.} a \operatorname{Cos.} a - 2x = 0,$$

woraus folgt

$$x = 2h \operatorname{Sin.} a \operatorname{Cos.} a$$

Diesen Wert in die obige Gleichung gesezt, giebt

$$y = h \operatorname{Sin.}^2 a = BD.$$

Von der Bewegung der Kanon-Kugeln in einem widerstehenden Raum.

§. 21.

Wir haben gesehen, daß Körper, welche in einem nicht widerstehenden Raum bewegt werden, durch ihre Bewegung eine Parabel beschreiben, und daß, wenn eine einige Schußweite nebst dem dazu gehörigen Erhöhungs-Winkel des Kanons gegeben ist, jede andere Schußweite unter jedem gegebenen Erhöhungs-Winkel gefunden werden könne.

So verhält sich aber die Sache nicht, wenn der Raum, in welchem sich der Körper bewegt, auch nur einigermassen widersteht. Die Bahn desselben ist eine krumme Linie, deren Eigenschaften verwickelter sind, als die Eigenschaften der Parabel, und es ist in diesem Fall keine leichte Sache, aus gegebenen Schußweiten andere unbekannte zu finden.

§. 22.

Obgleich es scheint, daß die Luft, deren Dichtigkeit ohngefehr 850mal kleiner ist, als die Dichtigkeit des Wassers, wegen dieser Ursache, der Bewegung der Körper keinen beträchtlichen Widerstand entgegen setzen sollte; so kann man dennoch, wegen der beträchtlich grossen Geschwindigkeit, womit Kanon-Kugeln sich bewegen, nicht mehr zweiflen, daß der Widerstand der Luft mit dem Gewicht der Kugel in keinem merklichen Verhältniß stehen sollte, und man sieht daher die äusserste Nothwendigkeit ein, den Widerstand der Luft in Berechnung zu ziehen, wenn man aus einer gegebenen

Schuß-

Schußweite jede andere Schußweite, unter gegebenen Erhöhungs-Winkeln, finden will.

§. 23.

Ehe wir aber in dieser Sache eine Theorie aufstellen, ist es nöthig zu wissen, was uns die Erfahrung in Absicht dieses Widerstandes lehre.

Versuche,

welche zu La Fère im Junius des Jahrs 1740 mit einem 24Pfünder, dessen Ladung 9 Pfund betragen, angestellt worden sind.

Erhöhungs-Winkel.	Beobachtete Schußweiten.	Schußweiten im luftleeren Raum, wobei angenommen wird, der Schuß unter 15° sey im luftleeren Raum geschehen.
4. Grad.	820. Toißen.	467. Toißen.
15.	1675.	1675.
20.	1740.	2153.
25.	1825.	2566.
30.	1910.	2901.
35.	2020.	3148.
40.	2050.	3300.
45.	2200.	3350.

§. 24.

Die dritte Colonne dieser Tafel beruht auf der Formel $b = 4h$ Sin. a Cosin. $a = 2h$ Sin. $2a$ (§. 7.) Sezt man also $a = 15^\circ$ und $b = 1675$ Halbruthen, so findet man $h = 1675$. Es ist also $b = 3350$ Sin. $2a$.

Sezt man nach und nach $a = 20^\circ$, $a = 25^\circ$ u. s. w.; so findet man die in der dritten Colonne bezeichnete Zahlen.

Vergleicht man nun die zweite und dritte Colonne mit einander; so erhellet, wie beträchtlich der Widerstand der Luft sey. Denn 1) wenn man annimmt, der Schuß unter dem Erhöhungs-Winkel von 15° sey im luftleeren Raum geschehen; so nimmt man eben dadurch die Kraft des Pulvers kleiner an, als sie in der That ist, weil, wie jedermann sieht, weniger Kraft dazu erfodert wird, einen Körper im luftleeren Raum auf die Weite von 1675 Toissen zu werfen, als in einem widerstehenden Raum. Daraus folgt also, daß die Schußweite, welche man nach der obigen Methode für einen Erhöhungs-Winkel von 4° findet, im luftleeren Raum nicht nur kleiner seyn muß, als die Schußweite, welche in ebendemselben Raum bei der wahren Grösse der Pulverkraft statt finden würde, sondern daß sie sogar kleiner seyn kann, als die Schußweite, welche in dem widerstehenden Raum statt findet, wofern der Fehler, welchen man in Absicht der Grösse der Pulverkraft begeht, einigermaßen beträchtlich ist. In der That sehen wir auch diesen Fall in der vorigen Tabelle, da die Schußweite im luftleeren Raum nur 467 Toißen, in dem widerstehenden aber 820 Toißen beträgt. 2) Obgleich die Kraft des Pulvers weit kleiner, als sie in der That ist,

berech-

berechnet wird, wenn man annimmt, der Schuß unter dem Erhöhungs-Winkel von 15° sey im luftleeren Raum geschehen; so erhellet dennoch aus obiger Tabelle, daß der Widerstand der Luft die Schußweiten um ein beträchtliches vermindert habe. Man sieht aus der dritten Colonne, daß die Schußweiten, welche nach der obigen Voraussetzung wegen der Grösse der Pulverkraft berechnet worden sind, dennoch grösser ausfallen, als die durch Versuche gefundene Schußweiten. Es ist also eine unumstößliche Wahrheit, daß, wenigstens bei grossen Ladungen, der Widerstand der Luft die Schußweiten auf eine solche beträchtliche Art vermindere, daß man aus der parabolischen Theorie diese Schußweiten nicht finden kann, ohne solche Fehler zu begehen, welche manchmal grösser sind, als das, was man sucht.

§. 25.

Wir wollen demnach sehen, wie man vermittelst einer neuern Theorie aus einer gegebenen Schußweite jede andere, bei gegebenen Erhöhungs-Winkeln des Kanons finden könne.

In dieser Absicht wollen wir annehmen, *ABC* sey die krumme Linie, deren Eigenschaften wir aufsuchen und *Mm* der unendlich kleine Bogen, welchen die Kugel in einem Zeittheilchen durchläuft. Wofern der Widerstand der Luft nicht vorhanden wäre, auch die Schwere auf den Körper nicht würkte; so würde er sich in dem folgenden Zeittheilchen nach der Linie *mq*, als der Verlängerung von M*m*, bewegen. Wenn wir annehmen, *qn* sey die Länge des Raums, welchen der Körper in diesem Zeittheilchen wegen dem Widerstand der Luft weniger durchläuft und *nm'* die Höhe, von welcher er wegen der Schwere herabfällt; so ist *m'* der Punkt, in wel- *Fig. 7.*

 chem

chem der Körper nach Verfluß des zweiten Zeittheilchens ankommt.

Man ziehe qr parallel mit der Vertical-Linie MP und ns parallel mit der Horizontal-Linie AC. Es sey AP $= x$, PM $= y$, der Bogen AM $= s$. Ferner wollen wir annehmen, R und p bezeichnen die Geschwindigkeiten, welche der Widerstand der Luft und die Schwere dem Körper mittheilen könnten, wofern sie während einer Sekunde gleichförmig würkten. Rdt und pdt sind demnach die Geschwindigkeiten, welche jene Kräfte dem Körper in dem Zeittheilchen dt mittheilen.

Wenn man die Verminderung der Geschwindigkeit, welche durch den Widerstand der Luft verursacht wird und durch qn vorgestellt werden kann, in zwei andere Geschwindigkeiten zerlegt, in die verticale qs und horizontale qo; so erhält man $nq : sq = Rdt$ zu der Verminderung der Geschwindigkeit, welche durch den Widerstand der Luft nach verticaler Richtung verursacht wird, und eben so ist $nq : sn = Rdt :$ zu der Verminderung der Geschwindigkeit nach horizontaler Richtung. Zieht man nun Mt mit AC parallel; so erhält man $nq : sq : sn = \mathrm{M}m : mt : \mathrm{M}t = ds : dy : dx$. Demnach ist die Verminderung der Geschwindigkeit nach der Richtung qs, $= \frac{Rdydt}{ds}$ und nach der Richtung sn, $= \frac{Rdxdt}{ds}$. Addirt man nun zu dem ersten Ausdruk noch die Würkung der Schwere; so erhält man

$$\frac{Rdydt}{ds} + pdt \text{ und } \frac{Rdxdt}{ds}$$

für

für die Verminderung der Geschwindigkeit so wohl nach verticaler, als nach horizontaler Richtung.

Indem aber der Körper den Bogen Mm durchläuft, bewegt er sich parallel mit PM um den Raum tm oder dy in die Höhe, und parallel mit AP um den Raum Mt oder dx vorwarts. Die Geschwindigkeit des Körpers, nach einer mit PM parallelen Richtung ist demnach $\frac{dy}{dt}$, und nach einer mit AP parallelen Richtung, $\frac{dx}{dt}$. Bewegt sich nun der Körper im Bogen mm'; so sind $\frac{dy}{dt} + d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ und $\frac{dx}{dt} + d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ die Geschwindigkeiten des Körpers, wofern dieselbe zunehmen, und mithin $-d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ und $-d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ die Geschwindigkeiten, um welche jene Geschwindigkeiten in dem nächstfolgenden Zeittheilchen vermindert werden. Man erhält also $\frac{Rdydt}{ds} + pdt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$

$$\text{und } \frac{Rdxdt}{ds} = -d\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Die Integralien dieser Gleichungen bestimmen die Natur der krummen Linie, welche Kanon-Kugeln und Bomben in ihrer Bahn beschreiben.

§. 26.

Wenn kein Widerstand der Luft vorhanden ist; so erhält man $pdt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$

und

und $o = - d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ woraus folgt

$$pt = C - \frac{dy}{dt} \text{ und } C' = \frac{dx}{dt}$$

Um diese beständige Grössen bestimmmen zu können; so nehme man an, AZ sey die Richtung des Kanons; der Winkel $ZAC = a$ und V die anfängliche Geschwindigkeit der Kugel; so ist V Cos. a die anfängliche Geschwindigkeit der Kugel nach horizontaler und V Sin. a ihre Geschwindigkeit nach verticaler Richtung. Die beständige Grössen C und C' müssen demnach so beschaffen seyn, daß $\frac{dx}{dt} =$ V Cosin. a und $\frac{dy}{dt} = V$ Sin. a, wenn $t = o$.

Dadurch erhält man $o = C - V$ Sin. a

und $C' = V$ Cosin. a

mithin $pt = V \text{ Sin. } a - \frac{dy}{dt}$

und $V \text{ Cosin. } a = \frac{dx}{dt}$.

Integrirt man aufs neue; so erhält man $y = Vt \text{ Sin. } a - \frac{1}{2}pt^2$ und $x = Vt$ Cosin. a, zu welchen Gleichungen man keine beständige Grössen addiren darf, weil y und x verschwinden, wenn t verschwindet. Sezt man in die erste Gleichung den aus der zweiten gefundenen Wert von t; so erhält man $y = \frac{x \text{ Sin. } a}{\text{Cosin. } a} - \frac{\frac{1}{2}px^2}{V^2 \text{ Cos.}^2 a}$ oder, wenn man die zu der Geschwindigkeit V gehörige Höhe mit h bezeich-

zeichnet, $y = \frac{x \text{ Sin.} a}{\text{Cosin.} a} - \frac{x^2}{4h \text{ Cos.}^2 a}$, welches eben die Gleichung ist, so wir schon oben gefunden haben.

§. 27.

Nun wollen wir den Fall näher betrachten, wo der Widerstand der Luft dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist.

Es ist aber bekannt, daß $\frac{1}{2} DSu^2 dt$ die Grösse der Bewegung bezeichne, welche durch den Widerstand der Luft während dem Zeittheilchen dt in dem Körper aufgehoben wird, wofern D die Dichtigkeit der Luft, S die vordere Oberfläche des Körpers, worauf die Luft würket, und u die Geschwindigkeit dieses Körpers ist. Es sey M die Masse des Körpers; so ist $\frac{DSu^2 dt}{2M}$ die Geschwindigkeit, welche der Körper während diesem Zeittheilchen verliert, oder auch der Wert der Grösse, welche wir oben durch Rdt bezeichnet haben. Es ist demnach $R = \frac{DSu^2}{2M}$.

Man setze $\frac{DS}{2M} = \frac{p}{K^2}$ und statt u setze man seinen Wert $\frac{ds}{dt}$; so erhält man $R = \frac{p}{K^2} \times \frac{ds^2}{dt^2}$.

Die obige beide Gleichungen werden also in diese

$$\frac{pdyds}{K^2 dt} + pdt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

und $\frac{pdxds}{K^2 dt} = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ verwandelt.

Wegen

Wegen mehrerer Kürze nehme man dt beständig an; so erhält man $\frac{pdyds}{K^2} + pdt^2 = - ddy$ und $\frac{pdxds}{K^2} = - ddx$.

Man suche aus der zweiten Gleichung den Wert von ds und setze ihn in die erste; so wird

$$- \frac{dyddx}{dx} + pdt^2 = - ddy$$

oder $pdt^2 = \frac{dyddx - dxddy}{dx} = - dxd\left(\frac{dy}{dx}\right)$

Wenn man die Gleichung $\frac{pdxds}{K^2} = - ddx$ mit K^2dt^2 multiplizirt; so ist $pdxdsdt^2 = - K^2dt^2ddx$

Für pdt^2 setze man seinen Wert $- dxd\left(\frac{dy}{dx}\right)$; so erhalten wir $- dx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)ds = - K^2dt^2ddx$

Nun ist $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$.

Mithin

$$dx^3d\left(\frac{dy}{dx}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = K^2dt^2\,ddx$$

oder

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = K^2dt^2 \times \frac{ddx}{dx^3}$$

Diese Gleichung muß integrirt werden, wenn man die Natur der krummen Linie kennen lernen will, welche die Kugel in ihrer Bahn beschreibt.

§. 28.

§. 28.

Weil dt eine beständige Grösse ist; so kann man das zweite Glied dieser Gleichung leicht integriren. Das Integrale desselben ist $-\frac{K^2dt^2}{2dx^2}$. Es kommt also nur noch darauf an, das erste Glied der vorigen Gleichung zu integriren.

§. 29.

In dieser Absicht bemerken wir, daß $\frac{dy}{dx}$ die Tangente des Winkels ist, welchendie krumme Linie in jedem Punkt mit dem Horizont einschließt. Man setze $\frac{dy}{dx} = \frac{2z}{1-zz}$, wo z die Tangente der Helfte jenes Winkels ist. Denn wenn a einen beliebigen Winkel bezeichnet; so ist bekannt, daß $\text{Sin. } 2a = 2\text{Sin. } a \text{ Cosin. } a$.
und $\text{Cosin. } 2a = \text{Cosin.}^2 a - \text{Sin.}^2 a$

$$\text{Mithin } \frac{\text{Sin. } 2a}{\text{Cosin. } 2a} = \frac{2\text{Sin. } a \text{ Cosin. } a}{\text{Cosin.}^2 a - \text{Sin.}^2 a}$$

$$= \frac{\frac{2\text{Sin. } a}{\text{Cos. } a}}{1-\frac{\text{Sin.}^2 a}{\text{Cosin.}^2 a}} = \frac{2\text{Tang. } a}{1-\text{Tang.}^2 a} = \text{Tang. } 2a$$

§. 30.

Daraus folgt $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2(1+zz)dz}{(1-zz)^2}$

$$\text{und } \surd\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right) = \surd\left(1+\frac{4z^2}{(1-zz)^2}\right)$$

$$= \surd\left(\frac{1+2z^2+z^4}{(1-zz)^2}\right) = \frac{1+zz}{1-zz}$$

Die

Die obige Gleichung verwandelt sich also in

$$\frac{2(1+zz)^2 dz}{(1-zz)^3} = K^2dt^2 \frac{ddx}{dx^3}$$

Nun ist das Integrale des ersten Gliedes

$$= \frac{z+z^3}{(1-zz)^2} + \tfrac{1}{2}\,\text{Log.} \left[\frac{1+z}{1-z}\right]$$ und man erhält demnach

$$\frac{z+z^3}{(1-zz)^2} + \tfrac{1}{2}\,\text{Log.} \left[\frac{1+z}{1-z}\right] = C - \frac{K^2dt^2}{2dx^2}.$$

Um zu beweisen, daß $\int \frac{2(1+zz)^2 dz}{(1-zz)^3}$

$$= \frac{z+z^3}{(1-zz)^2} + \tfrac{1}{2}\,\text{Log.} \left[\frac{1+z}{1-z}\right]$$ sey,

so setze man $\frac{2z}{1-zz} = p = \frac{dy}{dx}$. Da ist also

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) \surd\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right) = dp \surd(1+p^2)$$

$$= \frac{2dp \surd(1+p^2) \surd(1+p^2)}{2\surd(1+p^2)} =$$

$$\frac{2dp(1+p^2)}{2\surd(1+p^2)} = \frac{2dp + 2p^2 dp}{2\surd(1+p^2)}$$

$$= \frac{dp + 2p^2dp}{2\surd(1+p^2)} + \frac{dp}{2\surd(1+p^2)}$$

und $\int dp \surd(1+p^2) = \int \frac{dp + 2p^2 dp}{2\surd(1+p^2)} + \int \frac{dp}{2\surd(1+p^2)}.$

Nun ist $\int \frac{dp+2p^2dp}{2\surd(1+p^2} = \int \frac{pdp + 2p^3 dp}{2\surd(p^2+p^4)}$

$$= \frac{\surd(p^2+p^4)}{2} = \frac{p\surd(1+p^2)}{2}$$

Ferner

Ferner ist

$$\frac{dp}{2\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{pdp + dp\sqrt{(1+p^2)}}{2\sqrt{(1+p^2)}(p+\sqrt{(1+p^2)})}$$

wenn man Zehler und Nenner mit $p+\sqrt{(1+p^2)}$ multiplizirt.

Da ist also

$$\frac{dp}{2\sqrt{(1+p^2)}} = \left[\frac{dp}{2} + \frac{pdp}{2\sqrt{(1+p^2)}}\right] : [p+\sqrt{(1+p^2)}]$$

und

$$\int\frac{dp}{2\sqrt{1(1+p^2)}} = \tfrac{1}{2}\text{Log.}\ [p+\sqrt{(1+p^2)}].$$

Wir erhalten demnach

$$\int dp\sqrt{(1+p^2)} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+p^2)} + \tfrac{1}{2}\text{Log.}\ [p+\sqrt{(1+p^2)}]$$

Nun ist aber

$p = \frac{2z}{1-zz}$; daher

$$\tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+p^2)} + \tfrac{1}{2}\text{Log.}\ [p+\sqrt{(1+p^2)}] = \frac{z}{1-zz}\sqrt{\left(1+\frac{4z^2}{(1-zz)^2}\right)} + \tfrac{1}{2}\text{Log.}\ \left[\frac{2z}{1-zz} + \sqrt{\left(1+\frac{4z^2}{(1-zz)^2}\right)}\right]$$

$$= \frac{z+z^3}{(1-zz)^2} + \tfrac{1}{2}\text{Log.}\left[\frac{1+2z+z^2}{(1-zz)}\right] = \frac{z+z^3}{(1-zz)^2} + \tfrac{1}{2}\text{Log.}\left[\frac{1+z}{1-z}\right]$$

Der Uebersetzer.

§. 31.

Ehe wir weiter gehen, ist es nöthig, die beständige Grösse C zu bestimmen. Es sey also I der Erhöhungs-Winkel des Stüks. In dem Punkt, wo die Kugel aus der Mündung fährt, verhält sich

$$ds : dx = 1 : \text{Cosin. } I$$

und mithin $dx = ds \text{ Cosin. } I$

endlich $dx^2 = ds^2 \text{ Cosin. } I^2$

Es sey V die anfängliche Geschwindigkeit der Kugel; so ist $ds = V dt$. Demnach erhalten wir $dx^2 = V^2 dt^2 \text{ Cosin.}^2 I$ und mithin

$$\frac{dt^2}{dx^2} = \frac{1}{V^2 \text{ Cosin.}^2 I}$$

Die Höhe, von welcher ein schwerer Körper, vermöge des Gewichts, welches er in der Luft hat, fallen müßte, um die Geschwindigkeit V zu erlangen, sey $= h$; so ist $V^2 = 2ph$ und

$$\frac{dt^2}{2dx^2} = \frac{1}{4ph \text{ Cosin.}^2 I}$$

Diesen Wert setze man in die obige Gleichung. Weil nun $z = \text{Tang. } \frac{1}{2} I$, wenn $x = 0$; so erhält man

$$\frac{\text{Tang. } \frac{1}{2} I + \text{Tang.}^3 \frac{1}{2} I}{(1 - \text{Tang.}^2 \frac{1}{2} I)^2} + \frac{1}{2} \text{Log.} \left(\frac{1 + \text{Tang. } \frac{1}{2} I}{1 - \text{Tang. } \frac{1}{2} I}\right) = C - \frac{K^2}{4ph \text{ Cosin.}^2 I},$$

woraus man C leicht finden kann.

§. 32.

Wir kehren zu unserer Hauptgleichung zurük und setzen in dieselbe den Wert von dt^2, welchen man aus

aus der Gleichung $pdt^2 = -dxd\left(\frac{dy}{dx}\right)$
oder aus der Gleichung

$$pdt^2 = -dxd\left(\frac{2z}{1-zz}\right)$$

findet. Dadurch erhält man

$$\frac{z+z^3}{(1-zz)^2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log.}\left[\frac{1+z}{1-z}\right] = C + \frac{K^2 d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{2pdx}$$

woraus folgt

$$\frac{2pdx}{K^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{z+z^3}{(1-zz)^2} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log.}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

Und so ist die Gleichung beschaffen, welche integrirt werden muß, wenn man die Natur der krummen Linie will kennen lernen, welche eine Kugel durch ihre Bewegung in einer Luft beschreibt, deren Dichtigkeit in jedem Punkt gleich groß angenommen wird.

§. 33.

Aber die bekannte Integrazions-Methoden sind nicht hinreichend, diese Gleichung auf eine allgemeine Art zu integriren. Und die gewöhnliche Näherungs-Methoden können nur in solchen Fällen angewendet werden, wo sie den wenigsten Nutzen schaffen, das heißt, in solchen Fällen, wo die Geschwindigkeit der Kugel nicht beträchtlich ist. Wenn diese Geschwindigkeit sehr klein und demnach C sehr

groß ist; so kann man den veränderlichen Theil des Nenners ganz weglassen, wodurch man erhält

$$\frac{2pdx}{K^2} = -\frac{1}{C}\, d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)$$

Bei eben dieser Voraussetzung verwandelt sich der Wert von C in $\frac{K^2}{4ph \text{ Cosin.}^2 I}$ wodurch man also bekommt

$$dx = -2h \text{ Cosin.}^2 I\, d\left(\frac{2z}{1-zz}\right),$$

dessen Integrale

$$x = C' - 2h \text{ Cosin.}^2 I \left(\frac{2z}{1-zz}\right)$$

Wenn nun $\frac{2z}{1-zz}$ oder $\frac{dy}{dx} = \text{Tang. } I$ so ist $x = 0$, und demnach

$0 = C' - 2h \text{ Cosin.}^2 I \text{ Tang. } I$ und

$C' = 2h \text{ Sin. } I \text{ Cosin. } I$

Endlich

$$x = 2h \text{ Sin. } I \text{ Cosin. } I - 2h \text{ Cosin.}^2 I \times \frac{2z}{1-zz}$$

$$= 2h \text{ Sin. } I \text{ Cosin. } I - \frac{2hdy}{dx} \text{ Cosin.}^2 I$$

woraus folgt

$$\frac{x^2}{2} = 2hx \text{ Sin. } I \text{ Cosin. } I - 2hy \text{ Cosin.}^2 I$$

und $4hy \text{ Cosin.}^2 I = 4hx \text{ Sin. } I \text{ Cosin. } I - xx$, eben die Gleichung, wie im luftleeren Raum. (§. 5). Wenn demnach die Geschwindigkeit der Kugel sehr klein ist; so ist die Bahn der Kugel auch in einem widerstehenden Raum beinahe eine Parabel.

§. 34.

§. 34.

Wenn die Geschwindigkeit der Kugel zwar nicht sehr klein, aber doch so beschaffen ist, daß C beträchtlich grösser, als der gröste Wert von

$$\frac{z+z^3}{(1-zz)^2} + \tfrac{1}{2}\,\text{Log.}\left(\frac{1+z}{1-z}\right);$$

so kann man folgendergestalt integriren, indem man den Zehler $-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)$

durch den Nenner

$$C - \frac{z+z^3}{(1-zz)^2} - \tfrac{1}{2}\text{Log.}\left(\frac{1+z}{1-z}\right),$$

welchen man als ein Binomium betrachtet, davon C das erste Glied ist, dividirt. Löset man alsdenn $\frac{2z}{1-zz}$, $\frac{z+z^3}{(1-zz)^2}$ und $\text{Log.}\frac{1+z}{1-z}$ in Reihen auf; so erhält man für den Wert von

$$\frac{2pdx}{h^2}$$

eine Reihe von Monomien, welche leicht integrirt werden können, und welche Reihe desto convergenter ist, je grösser C. Wir halten uns aber bei dieser Näherungs-Methode deßwegen nicht auf, da der Fälle, auf welche sie sich erstrekt, sehr wenige und auch diese in der Näherungs-Methode, so wir nun vortragen wollen, enthalten sind.

§. 35.

Vor allen Dingen muß man

$$\tfrac{1}{2}\text{Log.}\frac{1+z}{1-z}$$

 in

in eine Reihe verwandeln. Es ist aber (*)

$$\tfrac{1}{2}\text{Log.}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} + \frac{z^{11}}{11} \text{ u. s. w.}$$

Wenn man diese Reihe mit $(1-zz)^2$ multiplizirt und das Produkt zu dem Zehler des Bruchs $\frac{z+z^3}{(1-zz)^2}$ addirt; so erhält man,

$$\frac{2z - 2z^3 + \frac{4}{3}z^3 + \frac{8}{15}z^5 + \frac{8}{105}z^7 + \frac{8}{315}z^9 + \frac{8}{693}z^{11}}{(1-zz)^2} \text{ u. s. w.}$$

Unsere Gleichung verwandelt sich also in

$$\frac{2pdx}{K^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \left(\frac{2z - 2z^3 + \frac{4}{3}z^3 + \frac{8}{15}z^5 \text{ u. s. w.}}{(1-zz)^2}\right)}$$

und diese wieder in

$$\frac{2pdx}{K^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2z}{1-zz}\left[\frac{1 + \frac{2}{3}z^2 + \frac{4}{15}z^4 + \frac{4}{105}z^6 \text{ u. s. w.}}{1-zz}\right]}$$

(*) „Man kann leicht erweisen, daß

$$„\tfrac{1}{2}\text{Log.}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \&c.$$

„Es ist nämlich

$$„d\left(\tfrac{1}{2}\text{Log.}\,\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{dz}{2(1+z)} + \frac{dz}{2(1-z}$$

$$„= \frac{dz}{1-zz} = dz\,(1-zz)^{-1}.$$

aber

„aber

„$(1 - zz)^{-1} = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + z^8$ u. s. w.

„Daher

„$dz(1 - zz)^{-1} = dz + z^2dz + z^4dz + z^6dz$ u. s. w.

„und

„$\int dz\sqrt{}(1 - zz)^{-1} = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7}$ u. s. w.

„$= \frac{1}{2}\text{Log.}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$.

Der Uebersetzer.

§. 36.

Wenn nun

$$1 + \frac{\frac{2}{3}z^2 + \frac{4}{15}z^4 + \&c.}{1 - zz}$$

eine beständige Grösse wäre, oder wenn man annehmen könnte, dieser Ausdruk sey einer beständigen Grösse a gleich, ohne dadurch Fehlern ausgesezt zu werden, welche weit grösser sind, als die in der Praxi unvermeidliche Fehler; so könnte man die obige Gleichung sehr leicht integriren. Denn man erhält

$$\frac{2pdx}{K^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2az}{1-zz}}$$

wo das zweite Glied dieser Gleichung ein logarithmisches Differenziale ist. Wir wollen also sehen, in wiefern man die Voraussetzung annehmen könne, daß

$$\frac{1 + \frac{2z^2}{3} + \&c.}{1 - zz}$$

eine beständige Grösse sey.

§. 37.

Weil z die Tangente der Helfte des Winkels ist, welchen die krumme Linie in jedem Punkt mit dem Horizont einschließt; so ist der gröste Wert von z, in aufsteigender Bahn, die Tangente der Helfte des Erhöhungs-Winkels. Wir wollen zum Beispiel annehmen, der Erhöhungs-Winkel sey 25°; so ist das Glied $\frac{\frac{2}{3}z^2}{1-zz}$ oder $\frac{2z}{1-zz} \times \frac{1}{3}z$ welches weit grösser ist, als eines der folgenden Glieder, = Tang. 25° × $\frac{1}{3}$ Tang. 12°,30′ = 0,034, ohngefehr. In dem ganzen aufsteigenden Ast der Kugelbahn verändert sich also

$$1 + \frac{\frac{2}{3}z^2 + \frac{4}{15}z^4}{1-zz} \text{ u. s. w.}$$

nur von 1,034 bis zu 1.

Und demnach kann man, wenigstens bis zu 25 Grad, ohne grossen Fehler die Grösse

$$\frac{1 + \frac{2}{3}z^2 + \frac{4}{15}z + \text{\&c.}}{1-zz}$$

als beständig annehmen.

§. 38.

Fig. 8. Um zu untersuchen, welches die schiklichste beständige Grösse ist, welche man statt

$$\frac{1 + \frac{2}{3}z^2 \text{ u. s. w.}}{1-zz}$$

annehmen kann; so bemerke man, daß, wenn die anfängliche Geschwindigkeit der Kugel sehr groß ist, der gröste Theil *AC* des aufsteigenden Asts beinahe eine gerade Linie ist und mithin z seinen anfänglichen Wert beinahe unverändert beibehält. Die schik-

lichste

lichste Voraussetzung ist also diese, daß $z =$ Tang. $\frac{1}{2}I$ gesezt werde.

§. 39.

Für solche Erhöhungs-Winkel, welche nicht viel grösser als 25° sind, stellt demnach die Gleichung

$$\frac{2pdx}{K^2} = \frac{-\,d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{z}{1-zz}}$$

die Natur der krummen Linie, wenigstens des aufsteigenden Asts, mit hinlänglicher Genauigkeit vor, wenn man

$$a = 1 + \frac{\frac{2}{3}\text{Tang.}^2\,\frac{1}{2}I + \frac{4}{15}\text{Tang.}^4\,\frac{1}{2}I \text{ u. s. w.}}{1 - \text{Tang.}^2\,\frac{1}{2}I}$$

sezt.

§. 40.

Was nun den niedersteigenden Ast anbetrift; so ist zu bemerken, daß der Fehler, welcher aus unserer Voraussetzung entspringt, keinen so grossen Einfluß auf diesen, als auf den aufsteigenden Ast habe, obgleich z jenseits des Punkts D, wo die krumme Linie mit dem Horizont eben den Winkel einschließt, den sie im Punkt A mit dem Horizont einschließt, immer grösser wird. Denn da alsdenn z eine verneinte Grösse ist; so ist der Nenner Fig. 8.

$$C - \frac{2z}{1-zz}\,(1 + \&c.$$

nicht mehr der Unterschied, sondern die Summe der beiden Grössen C und $\frac{2z}{1-zz}\,(1 + \&c.)$ und

und der Fehler, welcher bei dem Nenner begangen wird, hat einen desto geringeren Einfluß auf den Wert des Bruchs. Wofern also die krumme Linie im Punkt E, wo sie den Horizont wieder schneidet, keinen allzugrossen Winkel mit demselben einschließt; so kann man

$$\frac{2pdx}{K^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2az}{1-zz}}$$

als die Gleichung für die ganze krumme Linie betrachten.

§. 41.

Wir wollen nun näher untersuchen, welchen Einfluß unsere Näherungs-Methode auf die Bestimmung der Schußweiten habe.

Weil $\frac{2pdx}{K^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2az}{1-zz}}$; so ist

$$\frac{2px}{K^2} = C' - \int \frac{d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2z}{1-zz}(1 + \&c.)}$$

Je nachdem also unsere Näherungs-Methode die Grösse unter dem Zeichen $\int$ entweder zu groß oder zu klein angibt; so wird die Schußweite entweder zu klein oder zu groß.

§. 42.

Nun geben wir der Grösse a in der Formel

$$\frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C-\frac{2az}{1-zz}}$$

einen Wert, welcher, für den aufsteigenden Ast, in der That grösser ist, als der Factor, für welchen a gesezt wird, und wodurch mithin die Grösse unter dem Zeichen $\int$ zu groß gefunden wird. Der für den aufsteigenden Ast gehörige Theil der Schußweite wird also vermittelst dieser Methode kleiner gefunden, als er in einem widerstehenden Raum, dessen Dichtigkeit in allen Punkten gleich groß ist, in der That seyn würde.

§. 43.

Für den niedersteigenden Schenkel, wo z verneint wird, erhalten wir die Gleichung

$$\frac{2px}{K^2} = C' + \int \frac{d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C+\frac{2z}{1-zz}(1+\&c.)}$$

wo der Wert von a vom Scheidelpunkt B an, bis in den Punkt D, wo die krumme Linie eben den Winkel mit dem Horizont, wie im Punkt A, einschließt, noch zu groß ist, und demnach auch dieser Theil der Schußweite noch zu klein gefunden wird. Jenseits des Punkts D aber ist der Wert von a zu klein, dadurch wird die Grösse unter dem Zeichen $\int$, und mithin auch dieser Theil der Schußweite zu groß.

Da

Da aber die Vermehrung der Schußweite, welche zwischen den Punkten D und E geschiehet, die Verminderung, welche zwischen A und D geschiehet, nicht ersetzen kann; so folgt hieraus, daß vermöge dieser von uns vorgeschlagenen Näherungs-Methode, die Schußweiten zu klein gefunden werden, wenn der Wert von C' vollständig genau bekannt wäre. Weil aber die Grösse C' ebenfalls durch Näherung bestimmt wird; so trägt dieses sehr viel dazu bei, den Fehler, welcher wegen dem Wert von a entsteht, einigermassen zu verbessern, so, daß selbst für sehr grosse Erhöhungs-Winkel, bei der Voraussetzung, daß die Dichtigkeit der Luft eine beständige Grösse sey, die Schußweiten vermittelst dieser Näherungs-Methode ziemlich genau gefunden werden müssen.

§. 44.

Es würde eben nicht schwer seyn, dieser Methode einen grössern Grad von Genauigkeit zu geben, wenn man den Nenner des Werts von dx anders einrichten würde. Indessen wollen wir uns in diese Untersuchung noch nicht einlassen. Denn wenn gleich die obige Gleichung so eingerichtet werden kann, daß man daraus die Schußweiten in der Voraussetzung, daß die Dichtigkeit der Luft eine beständige Grösse sey, mit grösserer Genauigkeit findet; so würden sie deßwegen mit den Versuchen doch noch nicht völlig übereinstimmen, wenn wir nicht zugleich die Methode anzeigen, die Veränderung der Dichtigkeit zu berechnen. Diese Untersuchung werden wir aber erst in dem Folgenden anstellen.

§. 45.

§. 45.

Wir schreiten demnach zu der Integrazion der obigen Gleichung; geben aber vorher der Grösse C und dem Factor a eine zur Rechnung bequemere Gestalt.

Es ist

$$a = \frac{1 + \frac{2}{3}\text{Tang.}^2 \frac{1}{2}I + \frac{4}{15}\text{Tang.}^4 \frac{1}{2}I + \&c.}{1 - \text{Tang.}^2 \frac{1}{2}I}$$

Daraus folgt

$$a = 1 + \frac{2\,\text{Tang.}\,\frac{1}{2}I}{1 - \text{Tang.}^2 \frac{1}{2}I}\left(\frac{1}{3}\text{Tang.}\,\frac{1}{2}I + \frac{2}{15}\text{Tang.}^3 \frac{1}{2}I + \&c.\right)$$

und weil

$$\frac{2\,\text{Tang.}\,\frac{1}{2}I}{1 - \text{Tang.}^2 \frac{1}{2}I} = \text{Tang.}\,I\text{; so ist}$$

$$a = 1 + \text{Tang.}\,I\left(\frac{1}{3}\text{Tang.}\,\frac{1}{2}I + \frac{2}{15}\text{Tang.}^3 \frac{1}{2}I + \&c.\right)$$

Ferner ist

$$C = \frac{K^2}{4ph\,\text{Cos.}^2 I} + \frac{\text{Tang.}\,\frac{1}{2}I + \text{Tang.}^3 \frac{1}{2}I}{1 - \text{Tang.}^2 \frac{1}{2}I} + \frac{1}{2}\text{Log.}\left[\frac{1 + \text{Tang.}\,\frac{1}{2}I}{1 - \text{Tang.}\,\frac{1}{2}I}\right]$$

Verwandelt man nun das lezte Glied in eine Reihe und verfährt eben so, wie wir oben mit z verfahren sind (§. 35); so finden wir

$$C = \frac{K^2}{4ph\,\text{Cosin.}^2 I} + \frac{2\,\text{Tang.}\,\frac{1}{2}I}{1 - \text{Tang.}^2 \frac{1}{2}I}\left[1 + \frac{\frac{2}{3}\text{Tang.}^2 \frac{1}{2}I + \&c.}{1 - \text{Tang.}^2 \frac{1}{2}I}\right]$$

oder

$$C = \frac{K^2}{4ph\,\text{Cosin.}^2 I} + a\,\text{Tang.}\,I$$

§. 46.

Wenn wir nun die Gleichung

$$\frac{2pdx}{K^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2az}{1-zz}}$$

integriren; so finden wir

$$\frac{2px}{K^2} = C' + \frac{1}{a} \text{Log.} \left[C - \frac{2az}{1-zz}\right]$$

Um die beständige Grösse C' zu bestimmen, bemerke man, daß im Anfangspunkt A, $x = 0$ und $\frac{2z}{1-zz} = \text{Tang. } I$ sey.

Man erhält also

$$0 = C' + \frac{1}{a} \text{Log.} [C - a \text{ Tang. } I].$$

und $C' = -\frac{1}{a} \text{Log.} [C - a \text{ Tang. } I]$

$= \frac{1}{a} \text{Log.} \frac{K^2}{4ph \text{ Cosin.}^2 I}$, wenn man für C seinen Wert sezt. Demnach ist

$$\frac{2px}{K^2} = \frac{1}{a} \text{Log.} \frac{4ph \text{ Cosin.}^2 I}{K^2} \left[C - \frac{2az}{1-zz}\right]$$

Ist nun e die Zahl, deren Logarithmus $= 1$; so erhalten wir

$$e^{\frac{2apx}{K^2}} = \frac{4ph \text{ Cosin.}^2 I}{K^2}\left(C - \frac{2az}{1-zz}\right)$$

und

$$\text{und } \frac{2z}{1 - zz} = \frac{1}{a}\left[C - \frac{K^2}{4ph \text{ Cosin.}^2 I} e^{\frac{2apx}{K^2}}\right]$$

Es ist aber $\frac{dy}{dx} = \frac{2z}{1 - zz}$; mithin

$$dy = \frac{Cdx}{a} - \frac{K^2 dx}{4aph \text{ Cosin.}^2 I} e^{\frac{2apx}{K^2}}$$

Integrirt man, und wird die beständige Grösse durch die Bedingung bestimmt, daß $y = 0$, wenn $x = 0$; so wird

$$y = \frac{Cx}{a} + \frac{K^4}{8a^2p^2h \text{ Cosin.}^2 I}\left[1 - e^{\frac{2apx}{K^2}}\right]$$

oder, wenn man statt C seinen Wert sezt,

$$y = \left(\text{Tang.} I + \frac{K^2}{4aph \text{ Cosin.}^2 I}\right) x +$$

$$\frac{K^4}{8a^2p^2h \text{ Cosin.}^2 I}\left[1 - e^{\frac{2apx}{K^2}}\right]$$

So ist die Gleichung beschaffen, welche durch diese erste Näherungs-Methode gefunden worden, und vermöge welcher man die Schußweiten, von den kleinsten Geschwindigkeiten, bis zu denjenigen wenigstens, welche in der oben angeführten Tabelle der im Jahr 1740 angestelltin Versuche zu Grunde liegen, bestimmen kann.

An-

Anmerkungen des Uebersetzers.

„Es sey H der Winkel, welchen die Tangen„te der krummen Linie in einem beliebigen Punkt „mit dem Horizont einschließt; so ist

$$\mathrm{Tang.}\,H = \frac{2z}{1-zz}.$$

„Nun finden wir hier

$$\frac{2z}{1-zz} = \frac{1}{a}\left[C - \frac{K^2 e^{-\frac{2apx}{K^2}}}{4ph\,\mathrm{Cosin.}^2 I}\right];$$

„daher

$$\mathrm{Tang.}\,H = \frac{1}{a}\left[C - \frac{K^2 e^{-\frac{2apx}{K^2}}}{4ph\,\mathrm{Cosin.}^2 I}\right].$$

„Für jedes gegebene x kann man also Tang. H „und mithin auch H finden. Wenn x die Schuß„weite bezeichnet, so ist H der Winkel, welchen die „Tangente in dem Einfallspunkt mit dem Horizont „einschließt. Diese Untersuchung hat einen Nutzen, „welcher sich unten näher zeigen wird.

„Ferner wird in diesem Syhen die Gleichung

$$+ y = x\left(\mathrm{Tang.}\,I + \frac{K^2}{4ap\,\mathrm{Cosin.}^2 I}\right) + \frac{K^4}{8a^2p^2h\,\mathrm{Cosin.}^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{K^2}}\right)$$ gefunden.

„Kennt man also die anfängliche Geschwindigkeit „$V = \sqrt{(2ph)}$, oder die ihr zugehörige Höhe $h =$ „$\frac{V^2}{2p}$, den Erhöhungs-Winkel I, den Wider„stand der Luft, welcher durch den Buchstaben K^2 „aus-

„ausgedrukt wird und die Abscisse x; so kann man „die Ordinate y finden, und kennt man die Ordinate y nebst den übrigen Grössen; so kann man x „oder die Schußweite finden, wenn man verfährt, „wie der Autor im folgenden zeigt.

„Aus der gegebenen Entfernung einer Rico„chet-Batterie von einem Bollwerk, kann man al„so eine solche Höhe der Traverse finden, daß die „Kugel in die Brustwehr derselben einschlagt und „den Wallgang des Bollwerks nicht ricochettiren „kann.

„Man findet die Gleichung

$$„y - x \text{ Tang.} I = \frac{K^2 x}{4aph \text{ Cosin.}^2 I} +$$

$$„ \frac{K^4}{8a^2p^2h \text{ Cosin.}^2 I} \left(1 - e^{\frac{2apx}{K^2}}\right)$$

„oder

$$„y - x \text{ Tang.} I = \frac{2ap K^2 x + K^4 \left(1 - e^{\frac{2apx}{K^2}}\right)}{(8a^2p^2 \text{ Cosin.}^2 I)\, h}$$

„Daraus folgt

$$„\frac{8a^2p^2 \text{ Cosin.}^2 I (y - x \text{ Tang.} I)}{2ap K^2 x + K^4 \left(1 - e^{\frac{2apx}{K^2}}\right)} = \frac{1}{h}$$

„und

$$„h = \frac{2ap K^2 x + K^4 \left(1 - e^{\frac{2apx}{K^2}}\right)}{8a^2p^2 \text{ Cosin.}^2 I (y - x \text{ Tang.} I)}$$

„Wenn der Erhöhungs-Winkel des Stüks, „die Abscisse x, die Ordinate y, und der Wider„stand der Luft gegeben sind; so findet man aus die„ser Gleichung die zu der anfänglichen Geschwindig„keit der Kugel gehörige Höhe und daraus die Ge„schwindigkeit selbst, womit sich die Kugel aus der „Mündung des Stüks bewegen muß, wenn sie den „verlangten Gegenstand treffen soll.

„Wenn $y = 0$; so ist

$$„h = \frac{2ap\,K^2x + K^4\left(1 - e^{\frac{2apx}{K^2}}\right)}{-\,8a^2p^2x \text{ Sin. } I \text{ Cosin. } I}$$

„Wenn die anfängliche Geschwindigkeit der Ku„gel, die Abscisse x und die Ordinate y gegeben ist; „so kann man den Erhöhungs-Winkel I des Stüks „durch Näherung beinahe bestimmen, wenn man den „Buchstaben a aus der obigen Gleichung wegläßt.

„Man erhält nehmlich

$$„(y - x \text{ Tang. } I) \text{ Cosin.}^2 I = \frac{K^2x}{4ph} +$$

$$„\frac{K^4\left(1 - e^{\frac{2px}{K^2}}\right)}{8p^2h}$$

„oder

$$„y \text{ Cosin.}^2 I - x \text{ Tang. } I \text{ Cosin.}^2 I =$$

$$\frac{K^2x}{4ph} + \frac{K^4\left(1 - e^{\frac{2px}{K^2}}\right)}{8p^2h}$$

„Wenn

„Wenn $y = 0$; so ist

„$-x \text{ Sin. } I \text{ Cosin. } I = \frac{K^2 x}{4ph} + \frac{K^4}{8p^2h}$

„$- \frac{K^4 e^{\frac{2px}{K^2}}}{8p^2h}$

„oder

„$\frac{x}{2} \text{ Sin. } 2I = \frac{K^4 e^{\frac{2px}{K^2}}}{8p^2h} - \left(\frac{K^2x}{4ph} + \frac{K^4}{8p^2h}\right)$

„Daraus findet man den Winkel I, wenn „man für solchen nach und nach beliebige Werte sezt, „bis man endlich einen findet, welcher der Glei„chung ein Gnüge leistet.

§. 47.

Wenn der Widerstand der Luft klein, und zugleicher Zeit die anfängliche Geschwindigkeit der Kugel von mittelmäßiger Grösse ist, so daß die Schußweite merklich kleiner wird, als $\frac{K^2}{2pa}$; so ist der gröste Wert von $\frac{2apx}{K^2}$, ein Bruch und statt $e^{\frac{2apx}{K^2}}$ kann man die Reihe

$$1 + \frac{2apx}{K^2} + \frac{2a^2p^2x^2}{K^4} + \frac{4a^3p^3x^3}{3K^6} \text{ u. s. w.}$$

setzen, wodurch die obige Gleichung in folgende verwandelt wird

$$y = x \text{ Tang. } I + \frac{K^2x}{4aph\text{Cos.}^2 I} - \frac{K^2x}{4aph\text{Cos.}^2 I} - \frac{x^2}{4h \text{ Cos. } I} - \frac{apx^3}{6K^2 \text{Cos.}^2 I} \text{ u. s. w.}$$

oder

oder

$$y = x \text{ Tang. } I - \frac{x^2}{4h \text{ Cos.}^2 I} - \frac{apx^3}{6K^2 h \text{ Cos.}^2 I} \text{ u. s. w.}$$

Und wenn gar kein Widerstand vorhanden, so daß $\frac{p}{K^2} = 0$; so erhält man

$$y = x \text{ Tang. } I - \frac{x^2}{4h \text{ Cos.}^2 I} \quad .$$

oder

$$4hy \text{ Cosin.}^2 I = 4hx \text{ Sin. } I \text{ Cosin. } I - xx,$$

die Gleichung für die Parabel.

§. 48.

Wenn der Widerstand der Luft zwar nicht ganz Null, aber doch so beschaffen ist, daß $\frac{K^2}{2ap}$ grösser, als die Schußweite x seyn muß; so kann man diese Schußweite vermittelst der Reihe

$$y = x \text{ Tang. } I - \frac{x^2}{4h \text{ Cos.}^2 I} - \frac{apx^3}{6K^2 h \text{ Cos.}^2 I} \text{ u. s. w.}$$

welche man nach Verhältniß der Grösse des Bruchs $\frac{2apx}{K^2}$ verlängern muß, bestimmen.

Wenn aber $\frac{2apx}{K^2}$ nicht ein sehr kleiner Bruch ist; so ist es sowohl genauer, als auch kürzer, wenn man sich der obigen Exponenzial-Gleichung bedient.

§. 49.

Wir werden sogleich sehen, daß man für den Probe-Schuß von 15 Grad, welcher in der obigen Tabelle bemerkt ist, finde $\frac{2ap}{K^2} = 0{,}0016597$,

und

und weil in eben diesem Fall $x = 1675$; so ist $\frac{2apx}{K^2} = 2,78$ ohngefehr. Für solche Schußweiten, wie diejenige sind, dergleichen in der obigen Tabelle vorkommen, kann man also die Reihe

$$y = x \text{ Tang. } I - \frac{x^2}{4h \text{ Cos.}^2 I} - \frac{apx^3}{6K^2h \text{ Cos.}^2 I} \text{ u. s. w.}$$

welche in diesem Fall zu divergent ist, nicht gebrauchen.

§. 50.

Wir wollen nunmehr untersuchen, wie genau diese Theorie mit der Erfahrung übereinstimme.

Unter p haben wir die Geschwindigkeit verstanden, welche die Schwere in einer Sekunde einer Kugel mittheilt, wenn sie sich während dieser Zeit in einem luftleeren Raum bewegte, ihr Gewicht aber um das Gewicht des Luftkörpers, dessen Raum sie einnimmt, vermindert wäre.

Es sey $2r$ der Durchmesser der Kugel, $1 : c$ das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie; so ist $\frac{4}{3} cr^3$ der Innhalt der Kugel. Wenn nun D die Dichtigkeit der Luft, D' aber die Dichtigkeit der Materie anzeigt, woraus die Kugel besteht; so ist $\frac{4}{3} D'cr^3$ die Masse der Kugel und $\frac{4}{3} Dcr^3$ die Masse des Luftkörpers, dessen Raum die Kugel einnimmt.

Wenn p' die Geschwindigkeit ist, welche die Schwere einem freifallenden Körper in einer Sekunde mittheilen kann; so ist $p'dt$ die Geschwindigkeit, welche sie ihm in dem Zeittheilchen dt mittheilt. Es ist also $\frac{4}{3} D'cr^3 p'dt$ das Gewicht der Kugel im

luftleeren Raum; und $\frac{4}{3} Dcr^3 p'dt$ das Gewicht des Luftkörpers, dessen Raum die Kugel einnimmt; demnach $\frac{4}{3} cr^3 p'dt (D' - D)$ das Gewicht der Kugel in der Luft. Dividirt man nun dieses Gewicht mit der Masse $\frac{4}{3} cr^3 D'$ der Kugel; so ist $p'dt \left(\frac{D' - D}{D'}\right)$ die Geschwindigkeit, welche die Schwere der Kugel in dem Zeittheilchen dt in der Luft mittheilet. Man erhält also

$$p'dt \left(\frac{D' - D}{D'}\right) = pdt$$

$$\text{oder } p' \left(\frac{D' - D}{D'}\right) = p$$

Die specifische Schwere der Luft ist 850mal kleiner, als die specifische Schwere des Wassers, und die specifische Schwere des Eisens verhält sich zu der specifischen Schwere des Wassers $= 7{,}114 : 1$; mithin $D' : D = 6047 : 1$ und $p = \frac{6046}{6047} p'$. Weil dieser Bruch sehr wenig von der Einheit verschieden ist; so können wir $p = p' = 30{,}2$ Fuß $= 5{,}03333$ Toissen setzen, und es ist Log. $p = 0{,}7018556$.

Wir haben $\frac{DS}{2M} = \frac{p}{K^2}$ gesezt. Nun ist $S = \frac{1}{2} S'$, wo nehmlich S' den Innhalt eines grösten Kreises der Kugel vorstellt (*). Aber $S' = cr^2$ und mithin $S = \frac{1}{2} cr^2$. Eben haben wir $M = \frac{4}{3} cr^3 D'$ gefunden. Wir erhalten demnach

$$\frac{DS}{2M} = \frac{p}{K^2} = \frac{3}{8} \times \frac{D}{D'} \times \frac{1}{2r} :$$

Aber $\frac{D}{D'} = \frac{1}{6047}$, $2r = 5'',444 = 0',453666 = 0,^{T}075611$, woraus folgt

$$\text{Log. } \frac{p}{K^2} = 6{,}9139057.$$

(*) „Der Widerstand gegen eine Kugel, die sich „in der Luft bewegt, ist nur halb so groß, als „der Widerstand gegen die Grundfläche eines „geraden Zilinders, der sich nach der Rich- „tung seiner Axe bewegt, wenn seine Grund- „fläche dem grösten Kreise der Kugel gleich ist „und beide Körper mit gleicher Geschwindig- „keit in der Luft fortgehen.

Der Uebersetzer.

§. 51.

Es ist nun die Frage, wie man die Grösse der Kraft des Pulvers oder die Höhe *h* bestimmen könne, welche zu der Geschwindigkeit gehört, womit sich die Kugel aus der Mündung des Kanons bewegt.

Da der erste Versuch, welcher in der obigen Tabelle angeführt worden, unter dem sehr kleinen Erhöhungs-Winkel von 4° angestellt worden ist; so würden wir denselben zu unserer Absicht sehr wohl gebrauchen können, wenn wir versichert wären, daß die Kugel, nachdem sie die Mündung des Kanons verlassen, sich genau nach der Richtung bewegte, welche mit dem Horizont einen Winkel von 4 Grad einschließt. Da aber der Fehler, welcher bei diesem Winkel begangen werden möchte, mit dem Winkel selbst in einem grossen Verhältniß steht; so

können wir uns dieses Winkels nicht bedienen, ohne bei Berechnung der Kraft des Pulvers beträchtlichen Fehlern ausgesezt zu seyn. Der Winkel von 15 Grad ist noch klein genug, um obige Berechnungen mit einigem Rechte darauf anwenden zu dörfen und doch auch groß genug, um nicht zu befürchten, daß die Abweichung der Richtung der Kugel von diesem Winkel einen merklich nachtheiligen Einfluß auf die Grösse habe, welche wir suchen.

Man setze also $x = 1675$. Wenn man nun in der Gleichung

$$y = x\left(\text{Tang.}\, I + \frac{K^2}{4aph\, \text{Cos.}^2 I}\right) + \frac{K^4}{8a^2p^2h\, \text{Cosin.}^2 I} \cdot \left(1 - e^{\frac{2apx}{K^2}}\right)$$

setzet $y = 0$ und $x = 1675$; so findet man den Wert von h aus der Gleichung

$$0 = 1675\left(\text{Tang.}\, I + \frac{K^2}{4aph\, \text{Cosin.}^2 I}\right) + \frac{K^4}{8a^2p^2h\, \text{Cosin.}^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{K^2}}\right).$$

Gegeben sind $\frac{K^2}{p}$, Tang. I, Cosin. I.

Man darf also nur noch a berechnen. Es ist aber

Log. Tang.	15°,	0,	=	9. 4280525.
Log. Cosin.	15,	0	=	9. 9849438.
Tang.	15,	0	=	0. 26795.
Log. Tang.	7,	30	=	9. 1194291.

Weil

Weil nun

$a = 1 + \text{Tang.} I \left(\tfrac{1}{3}\text{Tang.}\tfrac{1}{2}I + \tfrac{2}{15}\text{Tang.}^3\tfrac{1}{2}I + \&c.\right)$

so verfahre man mit dieser Berechnung folgendergestalt:

$\text{Log. Tang. } \tfrac{1}{2}I = 9.\ 1194291$

$\text{Compl. Log. } 3 = 9.\ 5228787$

$\text{Log.} \tfrac{1}{3}\text{Tang. } \tfrac{1}{2}I = 8.\ 6423078$

$\text{Log. Tang.}^3 \tfrac{1}{2}I = 7.\ 3582873$

$\text{Log. } 2 = 0.\ 3010300$

$\text{Compl. Log. } 15 = 8.\ 8239087$

$\text{Log.} \tfrac{2}{15}\text{Tang.}^3\tfrac{1}{2}I = 6.\ 4832260.$

Demnach

$\tfrac{1}{3}\text{Tang.} \tfrac{1}{2}I + \tfrac{2}{15}\text{Tang.}^3 \tfrac{1}{2}I =$
$0{,}04389 + 0{,}00030 = 0{,}04419$

$\text{Log. } 0{,}04419 = 8{,}\ 6453240$

$\text{Log. Tang.} I = 9.\ 4280525$

Also $8.\ 0733765$

$\text{Log. } \left[\text{Tang.} I \left(\tfrac{1}{3}\text{Tang.} \tfrac{1}{2}I + \tfrac{2}{15}\text{Tang.}^3 \tfrac{1}{2}I\right)\right]$
$= 8.\ 0733765,$

welcher Logarithmus zu der Zahl 0,01184 gehört.

Es ist also $a = 1{,}01184$ und

$\text{Log. } a = 0{,}0051119.$

Ferner ist

$$\text{Log. } \frac{K^2}{p} = 3.\ 0860943$$

$\text{Compl. Log. } a = 9.\ 9948881$

$\text{Compl. Log. } 2 = 9.\ 6989700$

Mithin

$$\text{Log. } \frac{K^2}{2ap} = 2.\ 7799524$$

 und

und Log. $\frac{2ap}{K^2} = 7.\ 2200476$

Log. $1675 = 3.\ 2240148$

Log. $\frac{2ap \times 1675}{K^2} = 0.\ 4440624$

welcher zu der Zahl 2,780112 gehört.

Es ist auch Log. $\frac{K^2}{2ap} = 2.\ 7799524$

Compl. Log. $2 = 9.\ 6989700$

Log. $\frac{K^2}{4ap} = 2.\ 4789224$

Compl. Log. Cosin.$^2 I = 0.\ 0301124$

Daraus findet man

Log. $\frac{K^2}{4ap\ \text{Cosin.}^2 I} = 2.\ 5090348$

Log. $\frac{K^2}{2ap} = 2.\ 7799524$

Log. $\frac{K^4}{8a^2p^2\ \text{Cosin.}^2 I} = 5.\ 2889872.$

Demnach

$\frac{K^4}{8a^2p^2\ \text{Cosin.}^2 I} = 194530{,}27$

Ferner

Log. $\frac{K^2}{4ap\ \text{Cosin.}^2 I} = 2.\ 5090348$

Log. $1675 = 3.\ 2240148$

Log. $\frac{K^2 \times 1675}{4ap\ \text{Cosin.}^2 I} = 5.\ 7330496$

Mit.

Mithin $\frac{1675K^2}{4ap\,\mathrm{Cos.}^2 I} = 540816.$

Endlich Log. Tang. $I = 9.\ 4280525$
Log. $1675 = 3.\ 2240148$
Log. 1675 Tang. $I = 2.\ 6520673$
Daher 1675 Tang. $I = 448,815$
Wir erhalten also

$$o = 448,815 + \frac{540816}{h} + \frac{194530,27}{h}\left(1 - e^{2,780112}\right)$$

Nun ist aber überhaupt e^b die Zahl, deren hyperbolischer Logarithmus b und mithin auch die Zahl, deren gewöhnlicher Logarithmus

$b \times 0,4342945$ ist.

Multiplizirt man also 2,780112 mit 0,4342945; so erhält man für den gewöhnlichen Logarithmus von $e^{2,780112}$ die Zahl 1,207387. Dieser Logarithmus gehört aber zu der Zahl 16,120829. Mithin ist

$$o = 448,815 + \frac{540816}{h} - \frac{194530,27 \times 15,120829}{h}$$

oder $o = 448,815 - \frac{2400643}{h}$

Endlich

$h = \frac{2400643}{448,815} = 5348^{\text{Toiß.}},85$

und

Log. $h = 3,7282603.$

§. 52.

§. 52.

Man sieht also, daß die anfängliche Geschwindigkeit einer 24pfündigen Kugel zu einer Höhe von $5348,^{T}85$ oder 32093 Fuß, unter den gemeldten Umständen, gehöre. Fällt nun ein Körper im luftleeren Raum von einer solchen Höhe; so erlangt er eine Geschwindigkeit von 1393 Fuß in einer Sekunde. Eine 9pfündige Pulverladung theilt also einer 24pfündigen Kugel, an der Mündung des Kanons, welches auf 15 Grad gerichtet ist, eine Geschwindigkeit von 1393 Fuß in einer Sekunde mit.

§. 53.

Daraus erhellet 1) wie groß der Unterschied der solchergestalt bestimmten Grösse der Pulverkraft von der oben gefundenen Grösse derselben sey. Wenn man annimmt, der Schuß unter dem Erhöhungs-Winkel von 15 Grad sey im luftleeren Raum geschehen; so ist $h = 1675$ Toißen, da hingegen $h = 5349$ Toißen seyn muß.

2) Obgleich aus der Vergleichung der zweiten und dritten Colonne der obigen Tabelle erhellet, daß der Unterschied der Schußweite für den Erhöhungs-Winkel von 20 Grad, welche im luftleeren Raum statt gefunden haben würde, wenn man annehmen könnte, der Schuß unter dem Erhöhungs-Winkel von 15 Grad finde im luftleeren Raum statt, von der durch Versuche gefundenen Schußweite für eben den Erhöhungs-Winkel von 20 Grad, nur 415 Toißen betrage; so ist doch der Unterschied der beobachteten Schußweite von derjenigen, welche in der That im luftleeren Raum statt finden würde, weit

beträcht-

beträchtlicher. Denn da die Kraft des Pulvers nicht mehr aus 1675 Toißen, sondern aus 5358 Toiß. 85 beurtheilt wird; so findet man aus der Formel $2h$ Sin. $2a$, daß, unter einem Erhöhungs-Winkel von 20 Grad, die Schußweite im luftleeren Raum 6876 Toißen hätte seyn müssen. Nun ist sie aber in der Luft nur 1740 Toißen gewesen, der Widerstand der Luft verursacht also, daß die Schußweite um $\frac{3}{4}$ kleiner ist, als sie im luftleeren Raum gewesen seyn würde.

§. 54.

Wir wollen nunmehr vermittelst unserer Theorie die Schußweiten unter den Erhöhungs-Winkeln von 4 und 20 Grad berechnen.

In dieser Absicht betrachte man die Gleichung

$$y = x\left(\text{Tang.}\, I + \frac{K^2}{4aph\ \text{Cosin.}^2 I}\right) + \frac{K^4}{8a^2p^2h\ \text{Cosin.}^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{K^2}}\right)$$

und setze $y = 0$; so findet man den Wert von x aus der Gleichung

$$x\left(\text{Tang.}\, I + \frac{K^2}{4aph\ \text{Cosin.}^2 I}\right) + \frac{K^4}{8a^2p^2h\ \text{Cosin.}^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{K^2}}\right) = 0.$$

Da aber diese Gleichung nicht unmittelbar aufgelößt werden kann; so muß man für x so lange gewisse

Werte substituiren, bis man einen findet, welcher der Gleichung ein Gnüge leistet.

Wegen der Unbeträchtlichkeit des Winkels von 4 Grad kann man sicher $a = 1$ annehmen, wodurch die obige Gleichung sich in diese verwandelt.

$$0 = x\left(\text{Tang.}4^\circ + \frac{K^3}{4ph\,\text{Cosin.}^2 4^\circ}\right) + \frac{K^4}{8p^2 h\,\text{Cosin.}^2 4^\circ}\left(1 - e^{\frac{2px}{K^2}}\right).$$

Die Werte von $\frac{K^2}{p}$, und h sind oben schon berechnet worden; Tang. 4° und Cosin. 4° findet man aus den Tabellen. Sezt man nun $x = 820$; so findet man ein bejahtes Resultat von ohngefehr 5 Toißen, welches anzeigt, daß für eine Abscisse von 820 Toißen die Ordinate 5 Toißen betrage, und demnach die Schußweite grösser, als 820 Toißen, seyn müsse.

Sezt man nach und nach 840 und 860 Toissen; so findet man bejahte Resultate, welche immer abnehmen; und sezt man endlich 862 Toißen, so leistet dieser Wert der Gleichung ein Gnüge.

Unsere Theorie gibt also die Schußweite 862 und die Erfahrung 820 Toißen an. Der Fahler beträgt demnach nur ohngefehr $\frac{1}{20}$ Theil der Schußweite.

Im luftleeren Raum würde die Schußweite 1489 Toißen betragen haben.

Für einen Winkel von 20° findet man $a = 1{,}02165$ und Log. $a = 0{,}0093021$. Sucht man aus

aus den Tabellen Tang. 20°, und Cosin. 20° und sezt dieselbe nebst den oben gefundenen Werten von $\frac{K^2}{p}$, und h in die Gleichung

$$o = x \left(\text{Tang.}\, I + \frac{K^2}{4aph\, \text{Cosin.}^2 I}\right) + \frac{K^4}{8a^2p^2h\, \text{Cos.}^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{K^2}}\right)$$

so findet man ein bejahtes Resultat von öhngefehr 85 Toißen, wenn man x der aus Versuchen gefundenen Schußweite von 1740 Toißen gleich setzet. Nimmt man nach und nach 1780, 1800, 1820, und 1840; so wird nur im lezten Fall die Gleichung Null. Aus dieser Theorie findet man also 1840 Toißen für die Schußweite bei dem Erhöhungs-Winkel von 20°; und die Abweichung von der Erfahrung beträgt öhngefehr nur $\frac{1}{17}$ der Schußweite.

Im luftleeren Raum würde die Schußweite nicht 1840, sondern 6876 Toißen gewesen seyn.

Es erhellet hieraus, wie nahe diese aus unserer Theorie gefundene Resultate der Erfahrung kommen, obgleich die Gleichung, aus welcher sie gefunden werden, der Wahrheit noch weit gemäßer eingerichtet werden könnten. Es ist zwar wahr, daß die berechnete Schußweiten grösser ausfallen, als sie nach §. 43. ausfallen sollten; wir werden aber bald eine hinlängliche Ursache davon finden.

§. 55.

Wenn man ähnliche Berechnungen für die Winkel von 25, 30, 35, 40, 45° anstellt, so findet man nach und nach

$a = 1,$

$a = 1,03514$, für den Winkel von 25°.
$a = 1,05378$, von 30.
$a = 1,075958$, von 35.
$a = 1,10730$, von 40.
$a = 1,14777$, von 45.

und sezt man diese Werte in die obige Gleichung; so findet man die Schußweiten so, wie sie in nachstehender Tabelle angegeben sind.

§. 56.

Da übrigens der Wert von a vermittelst der oben §. 45. gegebenen Gleichung mühsam gefunden wird, wenn der Winkel I von beträchtlicher Grösse ist; so haben wir, die Berechnung zu erleichtern, folgende bequemere Formel aufgesucht. Es ist nehmlich

$$a = \frac{1}{2\,\text{Cos.}\,I} + \tfrac{1}{2}\,\text{Cotang.}\,I\,\text{Log.}\,\frac{1}{\text{Tang.}(45° - \frac{1}{2}I)}$$

oder

$$a = \tfrac{1}{2}\,\text{Sec.}\,I + \tfrac{1}{2}\,\text{Cotang.}\,I\,\text{Log. Tang.}\,(45° + \tfrac{1}{2}I)$$

wo der vorkommende Logarithmus ein hyperbolischer ist.

Diese Formel findet man aus

$$C = \frac{K^2}{4ph\,\text{Cosin.}^2 I} + a\,\text{Tang.}\,I \quad (§.\ 45.)$$

und

$$C = \frac{K^2}{4ph\,\text{Cosin.}^2 I} + \frac{\text{Tang.}\,\frac{1}{2}I + \text{Tang.}^3\,\frac{1}{2}I}{(1 - \text{Tang.}^2\,\frac{1}{2}I)^2} + \tfrac{1}{2}\,\text{Log.}\left[\frac{1 + \text{Tang.}\,\frac{1}{2}I}{1 - \text{Tang.}\,\frac{1}{2}I}\right] . \quad (§.\ 31.)$$

An-

Anmerkungen des Uebersetzers.

Es ist also

$$\frac{K^2}{4ph\ \mathrm{Cosin.}^2 I} + a\ \mathrm{Tang.}\ I = \frac{K^2}{4ph\ \mathrm{Cosin.}^2 I} +$$

$$\frac{\mathrm{Tang.}\ \tfrac{1}{2} I + \mathrm{Tang.}^3 \tfrac{1}{2} I}{(1 - \mathrm{Tang.}^2\ \tfrac{1}{2} I)^2}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\mathrm{Log.} \left[\frac{1 + \mathrm{Tang.}\ \tfrac{1}{2} I}{1 - \mathrm{Tang.}\ \tfrac{1}{2} I}\right]$$

und

$$a\ \mathrm{Tang.}\ I = \frac{\mathrm{Tang.}\ \tfrac{1}{2} I + \mathrm{Tang.}^3 \tfrac{1}{2} I}{(1 - \mathrm{Tang.}^2\ \tfrac{1}{2} I)^2} +$$

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{Log.} \left[\frac{1 + \mathrm{Tang.}\ \tfrac{1}{2} I}{1 - \mathrm{Tang.}\ \tfrac{1}{2} I}\right]$$

oder

$$a\ \mathrm{Tang.}\ I = \frac{\mathrm{Tang.}\ \tfrac{1}{2} I}{1 - \mathrm{Tang.}^2\ \tfrac{1}{2} I} \left(\frac{1 + \mathrm{Tang.}^2\ \tfrac{1}{2} I}{1 - \mathrm{Tang.}^2\ \tfrac{1}{2} I}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\mathrm{Log.}\ \frac{1 + \mathrm{Tang.}\ \tfrac{1}{2} I}{1 - \mathrm{Tang.}\ \tfrac{1}{2} I}$$

das heißt.

$$a\ \mathrm{Tang.}\ I = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tang.}\ I \left(\frac{1 + \mathrm{Tang.}^2\ \tfrac{1}{2} I}{1 - \mathrm{Tang.}^2\ \tfrac{1}{2} I}\right) +$$

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{Log.}\ \frac{1 + \mathrm{Tang.}\ \tfrac{1}{2} I}{1 - \mathrm{Tang.}\ \tfrac{1}{2} I}$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{Tang.}\ I \left(\frac{\mathrm{Cosin.}^2\ \tfrac{1}{2} I + \mathrm{Sin.}^2\ \tfrac{1}{2} I}{\mathrm{Cos.}^2\ \tfrac{1}{2} I - \mathrm{Sin.}^2\ \tfrac{1}{2} I}\right) +$$

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{Log.}\ \frac{1 + \mathrm{Tang.}\ \tfrac{1}{2} I}{1 - \mathrm{Tang.}\ \tfrac{1}{2} I}$$

 oder

oder

$$a\,\text{Tang.}\,I = \tfrac{1}{2}\text{Tang.}\,I\left(\frac{1}{\text{Cosin.}^2\tfrac{1}{2}I - \text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}I}\right) + \tfrac{1}{2}\text{Log.}\,\frac{1 + \text{Tang.}\tfrac{1}{2}I}{1 - \text{Tang.}\tfrac{1}{2}I}$$

$$= \frac{\text{Tang.}\,I}{2\,\text{Cosin.}\,I} + \tfrac{1}{2}\text{Log.}\,\frac{1 + \text{Tang.}\tfrac{1}{2}I}{1 - \text{Tang.}\tfrac{1}{2}I}$$

Endlich

$$a = \frac{1}{2\text{Cosin.}\,I} + \tfrac{1}{2}\text{Cotang.}\,I\,\text{Log.}\,\frac{1 + \text{Tang.}\tfrac{1}{2}I}{1 - \text{Tang.}\tfrac{1}{2}I}.$$

Daß aber

$$\text{Log.}\,\frac{1 + \text{Tang.}\tfrac{1}{2}I}{1 - \text{Tang.}\tfrac{1}{2}I} = \text{Log. Tang.}\,(45^\circ \pm \tfrac{1}{2}I)$$ sey,

läßt sich leicht erweisen.

Es ist $\text{Tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}I) =$

$$\frac{\text{Sin.}\,45^\circ\,\text{Cosin.}\tfrac{1}{2}I + \text{Sin.}\tfrac{1}{2}I\,\text{Cosin.}\,45^\circ}{\text{Cosin.}\,45^\circ\,\text{Cosin.}\tfrac{1}{2}I - \text{Sin.}\,45^\circ\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}I}$$

$$= \frac{\text{Cosin.}\tfrac{1}{2}I + \text{Sin.}\tfrac{1}{2}I}{\text{Cosin.}\tfrac{1}{2}I - \text{Sin.}\tfrac{1}{2}I} =$$

$$\frac{1 + \dfrac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}I}{\text{Cosin.}\tfrac{1}{2}I}}{1 - \dfrac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}I}{\text{Cosin.}\tfrac{1}{2}I}} = \frac{1 + \text{Tang.}\tfrac{1}{2}I}{1 - \text{Tang.}\tfrac{1}{2}I}.$$

Daher erhalten wir

$$a = \tfrac{1}{2}\text{Sec.}\,I + \tfrac{1}{2}\text{Cotang.}\,I\,\text{Log. Tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}I).$$

§. 57.

Um die Theorie noch einmal mit der Erfahrung vergleichen zu können, wollen wir die Schußweite des Kernschusses berechnen.

Die

Die obige Berechnung derselben stimmt keinesweges mit den Versuchen überein und davon fällt die Ursache in die Augen. Die Kraft des Pulvers, welche bei jener Berechnung zum Grunde gelegt wird, ist aus der falschen Voraussetzung bestimmt worden, daß die Luft keinen Widerstand äussere; sie ist also kleiner, als sie in der That seyn muß, und eben deßwegen findet man die Schußweite des Kern-Schusses auch zu klein.

Bestimmen wir aber dieselbe aus unserer Theorie; so kommen wir der Erfahrung viel näher. Wir wollen zu dem Ende einen 24Pfünder, dessen Ladung 9 Pfund beträgt, annehmen.

Der Winkel, welchen die Richtungslinie mit der Axe eines 24Pfünders einschließt, beträgt 1°11′.

Man kann also sowohl a, als Cosin. I der Einheit gleich annehmen. Ferner wollen wir setzen, die Distanz BL, wo die krumme Linie zum erstenmal die Richtungs-Linie schneidet, sey in Vergleichung mit der Schußweite des Kern-Schusses sehr klein, welches auch in der That so ist. Fig. 4.

Es ist $I = 1° \, 11'$ und die Gleichung, aus welcher man x findet, ist

$$0 = x\left(\text{Tang. } 1° \, 11' + \frac{K^2}{4ph}\right) + \frac{K^4}{8p^2h}\left(1 - e^{\frac{2px}{K^2}}\right).$$

Sezt man zuerst 300 Toißen für x; so findet man ein positives Resultat von ohngefehr 1 Toisse, welches anzeigt, daß die Schußweite des Kern-

 Schus-

Schusses grösser als 300 Toißen sey. Sezt man 320 Toißen; so findet man ein verneintes Resultat von $-0\overset{T}{,}4$, woraus folgt, daß die Schußweite des Kern-Schusses zwischen 300 und 320 Toißen falle. Sezt man endlich 314 Toißen; so wird dadurch der Gleichung auf hinlänglich genaue Art ein Genügen geleistet. Versuche geben aber 300 Toißen für die Schußweite des Kern-Schusses eines 24 Pfünders, dessen Ladung 9 Pfund Pulver betragen.

§. 58.

Wenn man die bisherige Berechnungen zusammen nimmt; so entsteht dadurch folgende Tabelle.

Tabelle

der beobachteten und berechneten Schußweiten für einen 24Pfünder, dessen Ladung 9 Pfund Pulver beträgt, wobei die Kraft des Pulvers aus der Schußweite, welche unter dem Erhöhungs-Winkel von 15° erhalten worden, nach der Theorie des Widerstandes berechnet wird.

Nach der Erfahrung.		Nach der neuen Theorie.	Nach der Parabel.
Erhöh. Winkel.	Schußweiten.	Schußweiten.	Schußweiten.
	Toißen.	Toißen.	Toißen.
4°.	820.	862.	1489.
15°.	1675.	1675.	5349.
20.	1740.	1840.	6876.
25.	1825.	1956.	8191.
30.	1910.	2011.	9265.
35.	2020.	2038.	10053.
40.	2050.	2035.	10526.
45.	2200.	1992.	10698.
Schußweite im Kern-Schuß.			
1° 11′	300.	314.	442.

§. 59.

§. 59.

Man sieht aus dieser Tabelle, wie ungereimt es seyn würde, wenn man sich noch an die parabolische Theorie halten wollte.

§. 60.

Die nach der Theorie des Widerstandes berechnete Schußweiten stimmen so genau mit den Versuchen überein, als man es bei dieser ersten Näherungs-Methode hoffen kann. Es ist bekannt, daß es keine Seltenheit ist, wenn die Schußweiten unter einerlei Erhöhungs-Winkel und übrigens gleichen Umständen, um 40 oder 50 und noch mehreren Toißen, besonders, wenn die Schußweiten, wie hier, sehr groß sind, von einander abweichen.

§. 61.

Ferner erhellet aus dieser Tabelle, daß die berechnete Schußweiten bis zu dem Erhöhungs-Winkel von 40° ohngerechnet, alle grösser sind, als die beobachtete. Obgleich aber die nach dieser ersten Näherungs-Methode berechnete Schußweiten den beobachteten nicht völlig gleich seyn können; so können sie doch so viel nicht verschieden seyn, als sie es hier sind. Dieser Unterschied, welcher bis zu dem Erhöhungs-Winkel von 40° immer zu groß ist, scheint augenscheinlich anzuzeigen, daß die Schußweite unter dem Erhöhungs-Winkel von 15 Grad, nehmlich 1675 Toißen, zu groß angenommen worden, wenn man die Dichtigkeit der Luft als eine beständige Grösse betrachtet.

Unter dem Erhöhungs-Winkel von 15° muß der Unterschied zwischen der Schußweite, welche man aus der vollkommen genau integrirten Gleichung

chung erhalten würde, und der Schußweite, welche man aus der nach unserer Methode integrirten Gleichung erhält, sehr unmerklich seye, und man wird desto eher überzeugt, daß man die 1675 Toisen um etwas vermindern müsse, wenn man 1) bedenkt, daß der Unterschied der Schußweiten von 15 und 20°, verglichen mit dem Unterschied der Schußweiten von 20 und 25° kleiner ist, als es scheint, daß er seyn sollte, und 2) daß man diese Schußweite nur um ein geringes vermindern dörfe, wenn die berechnete Schußweiten, welche zu groß ausfallen, mit der Erfahrung mehr übereinstimmen sollen. Vor jezo werden wir uns nicht weiter bemühen, die Theorie mit der Erfahrung übereinstimmender zu machen, weil dazu gehört, daß man bei den Schußweiten, welche unter grössern Erhöhungs-Winkel, als 26°, erhalten werden, auch die Verminderung der Dichtigkeit mit in Rechnung bringe, wovon erst in der Folge die Rede seyn wird.

§. 62.

Obgleich die Kraft des Pulvers, welche wir aus der Schußweite unter dem Erhöhungs-Winkel von 15° berechnet haben, die Schußweiten zu groß angiebt; so erhellet doch aus obiger Tabelle, daß, bei dem Erhöhungs-Winkel von 45°, die beobachtete Schußweite grösser ist, als die berechnete, und daß ohngefehr von dem 30° an gerechnet bis zu dem 45° die berechnete Schußweiten die beobachtete immer weniger übertreffen.

§. 63.

Die Erklärung dieser Erscheinungen muß man in der Veränderung der Dichtigkeit der Luft suchen,

welche immer dünner wird, je grösser die Höhe ist, auf welche die Kugel steigt. Dadurch heben sich also die Fehler, wovon der eine aus der Art, wie wir die Grösse der Pulverkraft bestimmt haben, und der andere daraus entsteht, daß wir die Dichtigkeit der Luft als eine beständige Grösse betrachten, immer mehr und mehr von 30 bis 42 Grad, auf. Jenseits dieses Punkts aber wird der Fehler, welcher aus der Voraussezung einer beständigen Dichtigkeit entsteht, grösser, als der Fehler, welcher aus der nicht vollkommen genau bestimmten Grösse der Pulverkraft entsteht.

§. 64.

Welche Voraussezung man auch immer über die Verminderung der Dichtigkeit der Luft auf verschiedenen Höhen annehmen will; so scheint es doch, daß die Schußweite unter dem Erhöhungs-Winkel von 45° fehlerhaft sey. Man bemerkt bei den beobachteten Schußweiten, daß ihre auf einander folgende Unterschiede, von 25° an gerechnet, folgende sind,

85, 110, 30, 150 Toißen.

das heißt, diese Unterscheide wachsen und sind bejaht bis gegen 35, abnehmend, aber doch bejaht, von 35 bis 40, endlich wieder wachsend und bejaht von 40-45 Grad.

Es scheint aber, daß, wenn man auch, der Erfahrung gemäß, die Schußweite unter 45° grösser annimmt, als die von 40, doch der Unterschied derselben kleiner seyn sollte, als der Unterschied der Schußweiten unter 35 und 40. Denn es ist ein allgemeines Gesez, daß eine Grösse, wenn sie sich dem Maximo nähert, nach beständig abnehmenden

Gra-

Graden wächst. Es ist also wahrscheinlich, daß die Schußweite von 45° weit grösser ist, als sie in Vergleichung mit den andern Schußweiten seyn sollte, wenn nicht noch eine andere Ursache, ausser der Veränderung des Erhöhungs-Winkels, einen Einfluß auf dieselbe hat. Es ist zwar wahr, daß, wenn man die Veränderung der Dichtigkeit in Rechnung bringt, der Unterschied der Schußweite von 40° von der Schußweite von 45° grösser seyn muß, als in der Voraussetzung einer beständigen Dichtigkeit: aber doch scheint es, daß dieser Unterschied nicht grösser seyn dörfe, als der Unterschied der Schußweite unter 35° von der Schußweite unter 40°.

§. 65.

Aus der Veränderung der Dichtigkeit würde man vielleicht am besten erklären können, warum die gröste Schußweite, welche nach dieser ersten Näherungs-Methode sehr nahe an 40° ist, nach der Erfahrung für einen grössern Winkel gehört, so daß, wenn der Erhöhungs-Winkel für die gröste Schußweite in einem widerstehenden Raum nicht 45° ist, derselbe, den Versuchen gemäß, wenigstens zwischen 40 und 45° liegen müsse. In der Voraussetzung einer beständigen Dichtigkeit, welche sich zu der Dichtigkeit des Wassers wie 1 : 850 verhält, würde der Winkel für die gröste Schußweite noch kleiner seyn, als ihn unsere Theorie angibt. Die veränderliche Dichtigkeit der Luft kann aber verursachen, daß dieser Winkel sich dem Winkel von 45 wieder nähert und obgleich die unter dem Erhöhungs-Winkel von 45° beobachtete Schußweite die gröste ist, welche in unserer Tabelle vorkommt; so kann man doch nicht mehr zweiflen, daß man durch Versuche,

welche unter dem Winkel von 36, 40 und 45° mit mehr Sorgfalt angestellt würden, die gröste Schußweite merklich unter 45 Grad finden würde.

§. 66.

Wir wollen nunmehr die Dichtigkeit der Luft in dem obern Theil der krummen Linie durch Näherung zu bestimmen suchen.

In dieser Absicht müssen wir die Gleichung

$$y = x \left(\text{Tang.}\, I + \frac{K^2}{4aph\ \text{Cos.}^2 I}\right) + \frac{K^4}{8a^2p^2h\ \text{Cosin.}^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{K^2}}\right)$$

noch einmal betrachten.

Um die gröste Ordinate zu erhalten, muß man den Wert von y differenziiren, und $\frac{dy}{dx} = 0$ sezzen. Wir erhalten also

$$0 = \left(\text{Tang.}\, I + \frac{K^2}{4aph\text{Cos.}^2 I}\right) - \frac{K^2\, e^{\frac{2apx}{K^2}}}{4aph\text{Cos.}^2 I}$$

woraus folgt

$$e^{\frac{2apx}{K^2}} = \frac{\text{Tang.}\, \text{I} + \frac{\text{K}^2}{4aph\ \text{Cosin.}^2\text{I}}}{\frac{\text{K}^2}{4aph\,\text{Cosin.}^2\text{I}}}$$

$$= \frac{b}{\frac{\text{K}^2}{4aph\,\text{Cosin.}^2\text{I}}} = \frac{4aphb\ \text{Cosin.}^2\text{I}}{\text{K}^2}$$

wo

wo nehmlich

$$\text{Tang.}\,I + \frac{K^2}{4aph\ \text{Cosin.}^2 I} = b$$

Demnach ist

$$\frac{2apx}{K^2}\ \text{Log.}\,e = \frac{2apx}{K^2} = \text{Log.}\ \frac{4aphb\,\text{Cosin.}^2 I}{K^2}$$

und

$$x = \frac{K^2}{2ap}\ \text{Log.}\ \frac{4aphb\,\text{Cosin.}^2 I}{K^2}$$

Man erhält also

$$y = \frac{bK^2}{2ap}\ \text{Log.}\left(\frac{4aphb\ \text{Cosin.}^2 I}{K^2}\right) + \frac{K^4}{8a^2p^2h\ \text{Cosin.}^2 I}\left(1 - \frac{4aphb\,\text{Cosin.}^2 I}{K^2}\right).$$

§. 67.

Weil oben schon die Werte von $\frac{K^2}{p}$, a, h u. s. w. gefunden worden sind; so ist es nicht mehr schwer, die gröste Höhen zu berechnen, auf welche die Kugel in den oben angeführten Versuchen gestiegen ist. Wir haben uns dieser Arbeit unterzogen und folgende Tabelle verfertiget.

§. 68.

Vermittelst dieser Berechnung und desjenigen, was in der Note gelehrt wird, ist es leicht, die Dichtigkeit der Luft zu bestimmen, in welcher sich die Kugel im Scheidelpunkt der krummen Linie befindet. Sezt man also diese Zahlen in die Formel

$$\Delta = e^{-\frac{y}{\alpha H}}$$

so

so erhält man die Resultate, welche in folgender Tabelle enthalten sind.

Tabelle

der grösten Höhen, auf welche die Kugel in den obigen Versuchen gestiegen ist, nebst der Dichtigkeit der Luft in diesen Höhen.

Erhöhungs-Winkel.	Gröste Höhen, auf welche die Kugel gestiegen.	Dichtigkeit der Luft in dessen Höhen, wo die Dichtigkeit der Luft im Wurfspunkt = 1 angenommen wird.
	Toißen.	
4°	19,5.	0,99$\frac{1}{8}$
15.	173,5.	0,97$\frac{1}{2}$
20.	269,9.	0,94$\frac{1}{2}$
25.	376,8.	0,92.
30.	492.	0,90.
35.	614.	0,87$\frac{1}{3}$
40.	741,6.	0,85.
45.	869,5.	0,82$\frac{1}{2}$

Anmerkung des Uebersetzers.

Fig. 10. Es sey *ACDB* ein mit Luft angefülltes Gefäß. Diese Luft ist desto dichter, je näher sie an dem Boden *CD* dieses Gefässes ist, weil sie von der obern Luft zusammengedrukt wird. Theilt man dieses Gefäß in mehrere gleiche Schichten *aD, cb* u. s. w. so

so ist die Dichtigkeit der Luft in einer jeden derselben verschieden. Es ist nun die Frage, die Dichtigkeit der Luft in der Höhe lD über der Grundfläche CD zu finden, wenn die Dichtigkeit derselben auf dem Boden des Gefässes gegeben ist.

Es sey diese Höhe $= y$, die zu suchende Dichtigkeit in dieser Höhe $= \Delta$. Wenn nl unendlich klein ist; so ist der Druk auf die Fläche Kl, $= Kl\,\Delta\,dy$, weil man nemlich die Dichtigkeit in dieser Schicht, deren Höhe unendlich klein ist, in allen Punkten gleich groß annehmen kann.

Daraus findet man den Druk der Luft auf jede andere Fläche, zum Beyspiel, auf die Fläche cd, $= cd \int \Delta\, dy$. Man drucke den Innhalt dieser Fläche durch die Zahl 1 aus; so ist der Druk auf dieselbe, $= \int \Delta\, dy$.

Wenn h die Höhe des Quecksilbers im Barometer, in dieser Entfernung von der Grundfläche CD, α die Dichtigkeit des Quecksilbers ist: wenn man ferner bedenkt, daß die Höhe des Quecksilbers im Barometer abnimmt, je höher der Ort liegt, worauf der Barometer steht; so erhält man

$$\int - \Delta dy = \alpha h$$

wofern die Grundfläche, worauf die Quecksilber-Säule ruht, ebenfalls $= 1$ ist.

Ferner ist bekannt, daß sich, bei mäßigen Zusammenpressungen, die Dichtigkeit der Luft, wie das Gewicht verhalte, womit die Luft zusammengepreßt wird. Die Dichtigkeit der Luft auf der Grundfläche CD sey $= D$ und die Höhe des Quecksilbers im Barometer, in dieser Gegend, $= H$; so ist $\alpha H : \alpha h = H : h = D : \Delta$, wofern die Grundflächen,

worauf

worauf diese Quecksilber-Säulen ruhen, gleich sind. Man findet daraus

$$h = \frac{H\Delta}{D}$$

mithin $\int - \Delta\, dy = \frac{aH\Delta}{D}$.

Weil a, H, D beständige Grössen sind; so ist

$$-\Delta dy = \frac{aH}{D}\, d\Delta$$

oder $-\frac{D}{aH}\, dy = \frac{d\Delta}{\Delta}$

und $-\frac{Dy}{aH} + C = \text{Log.}\, \Delta$

Wenn $y = 0$; so ist $\Delta = D$ und

$$C = \text{Log.}\, D \text{ ; daher}$$

$$\text{Log.}\, \frac{\Delta}{D} = -\frac{Dy}{aH}$$

woraus folgt

$$\frac{\Delta}{D} = e^{-\frac{Dy}{aH}}$$

Es verhält sich die Dichtigkeit D der Luft zu der Dichtigkeit E des Wassers $= D : E. = 1 : 850$; daher $D = \frac{E}{850}$. Ferner verhält sich die Dichtigkeit des Wassers zu der Dichtigkeit des Quecksilbers $= E : a = 1 : 14$; daher $E = \frac{a}{14}$; mithin $D = \frac{a}{850 \times 14} = \frac{a}{11900}$.

Wenn

Wenn man die Dichtigkeit der Luft auf der Grundfläche CD, als 1 annimmt; so ist $\alpha = 11900$. Nun ist $H = 27\frac{5}{9}''$, Pariser Maaß; mithin $\alpha H = 27601\frac{1}{3}'$ beinahe. Demnach erhalten wir

$$\Delta = e^{-\frac{3y}{82804}}$$

Wenn $y = 492^{\text{Toißen}} = 2952'$; so ist

$$\Delta = e^{-\frac{8856}{82804}}$$ und

$$\text{Log. } \Delta = -\frac{8856}{82804} = -0{,}1069,$$ welches mit 0. 4342945 multiplizirt, giebt — 0. 0471209.

Die dazu gehörige Zahl ist beinahe $\frac{1}{1{,}112} = 0{,}90$; daher $\Delta = 0{,}90$, wie in der Tabelle.

Man muß sich erinnern, daß man aus den hyperbolischen Logarithmen, die gewöhnliche finde, wenn man jene mit 0. 4342945 multiplizirt.

§. 69.

Wir schreiten nunmehr zur Berechnung der Zeit, während welcher die Kugel ihre Bahn beschreibt.

Wir haben oben die Gleichung

$$\frac{z + z^3}{(1 - zz)^2} + \frac{1}{2}\text{Log.}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) = C - \frac{K^2 dt^2}{2dx^2},$$

gefunden, welche, wenn man sie in eine Reihe auflößt, sich in folgende verwandelt:

$$K^2 dt^2 = 2dx^2 \left[C - \frac{2az}{1 - zz}\right]$$

Und

Und weil

$$C - \frac{2az}{1 - zz} = \frac{K^2 e^{\frac{2apx}{K^2}}}{4ph \operatorname{Cof.}^2 I} \text{; so ist}$$

$$K^2 d^2 t = \frac{2K^2 e^{\frac{2apx}{K^2}}}{4ph \operatorname{Cosin.}^2 I} dx^2,$$

oder

$$dt = \frac{e^{\frac{apx}{K^2}} dx}{\operatorname{Cosin.} I \sqrt{(2ph)}}$$

und mithin

$$t = \frac{K^2}{ap \operatorname{Cosin.} I \sqrt{(2ph)}} \left(e^{\frac{apx}{K^2}} - 1 \right)$$

wo die beständige Grösse durch die Bedingung bestimmt wird, daß $t = 0$, wenn $x = 0$.

Wenn $\frac{apx}{K^2}$ sehr klein ist; so kann man statt $e^{\frac{apx}{K^2}}$ die Reihe $1 + \frac{apx}{K^2} + \frac{a^2p^2x^2}{2K^4} + \frac{a^3p^3x^3}{6K^6} +$ &c. setzen und alsdenn ist

$$t = \frac{1}{\operatorname{Cosin.} I \sqrt{(2ph)}} \left[x + \frac{apx^2}{2K^2} + \frac{a^2p^2x^3}{6K^4} + \text{\&c.} \right]$$

§. 70.

§. 70.

Wenn also 1) $\frac{p}{K^2} = 0$, oder wenn gar kein Widerstand der Luft vorhanden ist, so erhalten wir $t = \frac{x}{\text{Cosin.} I \sqrt{(2ph)}}$ welches vollkommen mit dem 19 §phen übereinstimmt.

2) Wenn zwar $\frac{p}{K^2}$ nicht $= 0$, aber $\frac{apx^2}{2K^2}$ doch in Ansehung der Grösse x sehr klein ist; so erhalten wir beinahe

$$t = \frac{x}{\text{Cosin.} I \sqrt{(2ph)}} \left(1 + \frac{apx}{K^2}\right)$$

woraus erhellet, daß der durchlauffene Raum der Zeit beinahe proportional seye, in welcher er durchlauffen wird.

Anmerkung des Uebersetzers.

„Es ist $u = \frac{ds}{dt}$ und $u^2 = \frac{ds^2}{dt^2} =$
„$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$. Weil $\frac{dy}{dx} = \text{Tang. } H$, wie
„wir oben angenommen haben, §. 45. in der Note;
„so ist $dy^2 = dx^2 \text{ Tang.}^2 H$ und
„$u^2 = \frac{dx^2(1 + \text{Tang.}^2 H)}{dt^2}$
„Aber
„$dt^2 = \frac{2dx^2}{K^2} [C - a \text{ Tang. } H]$, wie wir eben gefunden haben; daher
„$u^2 = \frac{K^2 [1 + \text{Tang.}^2 H]}{2 [C - a \text{ Tang. } H]}$

„Ist x gegeben; so kann man H finden, aus der „Gleichung

$$„\text{Tang.}\, H = \frac{1}{a}\left[C - \frac{K^2 e^{\frac{2apx}{K^2}}}{4ph\,\text{Cos.}^2 I}\right]$$

„§. 45. in der Note.

„Ist aber H bekannt; so weiß man die Ge„schwindigkeit, mit welcher sich die Kugel in der „Entfernung x von der Mündung des Kanons be„bewegt. Auf solche Art kann man die Geschwin„digkeit finden, womit die Kugel in einen Wall ein„dringt, wenn uns nehmlich die Entfernung unse„rer Batterie von diesem Wall bekannt ist.

§. 71.

Diese Theorie wollen wir auf die zu Straßburg den 18 August des Jahrs 1766 angestellte Versuche anwenden.

Fig. 9. Auf die Chaussée nach Fort-Louis hat man ein 12pfündiges Kanon so gestellt, daß die mit dem Horizont AH parallele Axe des Kanons, 14 Fuß, 4 Zoll über die Fläche der Wiese erhoben war. Die Höhe DC des Falls der Kugel beträgt demnach 14 Fuß, 4 Zoll und man hat gefunden, daß die mittlere Schußweite BC, $176\frac{1}{2}$ Toißen beträgt, wenn das Kanon mit 4 Pfund Pulver geladen worden.

Hierauf hat man eben das Kanon in einen andern Punkt A' gebracht, welcher nur 3′ 4″ höher lag, als die Fläche der Wiese. Die mittlere Schußweite hat man, bei eben der Ladung, von 95 Toißen gefunden.

Da

Da nun die Höhen, von welchen die Kugel in beiden Fällen gefallen ist, sehr klein sind; so hat der Widerstand der Luft die verticale Geschwindigkeit der Kugel nicht merklich verändern können, und man kann deßwegen annehmen, daß die Zeiten, in welchen die Kugel jedesmal ihre Bahnen durchlaufen hat, sich wie die Quadrat-Wurzeln aus jenen Höhen, d. i., wie $\sqrt{(14,33333)} : \sqrt{(3,75)} = 1,95 : 1$ verhalten. Da sich aber die Schußweiten verhalten, wie $176,5 : 95 = 1,86 : 1$; so ist das aus der Erfahrung gefundene Verhältniß der Zeiten wenig von dem Verhältniß der Schußweiten verschieden.

Wir wollen sehen, welches Verhältniß wir aus unserer Theorie finden. Nach derselben müssen sich jene Zeiten verhalten =

$$176\tfrac{1}{2}\left[1 + \frac{p}{2K^2} \times 176\tfrac{1}{2}\right] :$$

$$95\left[1 + \frac{p}{2K^2} \times 95\right]$$

wenn $\frac{p \times 176\frac{1}{2}}{2K^2}$ ein kleiner Bruch ist. Durch eine Berechnung, welche derjenigen, so wir §. 50. angestellt haben, ähnlich ist, findet man für eine 4pfündige Kugel, deren Durchmesser $4^{\text{Zoll}},321$ oder $0^{\text{Toiß.}},060013$ beträgt,

$$\frac{p}{K^2} = 0{,}0010333.$$ Mithin,

$$\frac{p \times 176\frac{1}{2}}{2K^2} = 0{,}0912$$ und

$$\frac{p \times 95}{2K^2} = 0{,}0489.$$

 Die

Die Zeiten verhalten sich also, wie $176\frac{1}{2}' \times 1{,}0912 : 95 \times 1{,}0489 = 1{,}94 : 1$, beinahe; und dieses Verhältniß ist wenig von dem Verhältniß der Schußweiten, noch weniger aber von dem Verhältniß der Quadrat-Wurzeln der Höhen, von welchen die Kugel gefallen ist, verschieden.

§. 72.

Man sieht hieraus, daß man sich sehr irren würde, wenn man aus diesen Versuchen den Schluß ziehen wollte, der Widerstand der Luft habe auf die Bewegung der Kanon-Kugeln keinen merklichen Einfluß. Es ist zwar wahr, daß sich die Zeiten in diesem Falle fast eben so, wie im luftleeren Raum, verhalten. Aber die Theorie des Widerstandes zeigt auch, daß sie sich beinahe so verhalten müssen. Daraus folgt also keineswegs, die Luft setze der Bewegung der Kanon-Kugeln keinen merklichen Widerstand entgegen.

§. 73.

Wenn man wissen will, wie sich in diesem Fall der anfängliche Widerstand der Luft zu dem Gewicht der Kugel verhalte; so nehme man die Gleichung

$$y = x\left[\text{Tang.}\, I + \frac{K^2}{4aph\,\text{Cosin.}^2 I}\right] + \frac{K^4}{8a^2p^2h\,\text{Cosin.}^2 I}\left[1 - e^{\frac{2apx}{K^2}}\right];$$

Setze $y = -14^{\text{Fuß}},3333 = -2^{\text{Toiß.}},3888$, $x = 176^{\text{Toiß.}},5$, Tang. $I = 0$, Cosin. $I = 1$, und

und $a = 1$; und berechne den Wert von h, indem man statt $\frac{K^2}{p}$ den oben gefundenen Wert sezt. Man findet $h = 3646$ Toißen, und zu dieser Höhe gehört eine Geschwindigkeit von 192 Toißen oder 1152 Fuß in einer Sekunde. Der Widerstand der Luft, welcher allgemein durch $\frac{Dsu^2 dt}{2M} = \frac{p}{K^2} \times u^2 dt$ ausgedrukt wird, ist demnach in gegenwärtigem Fall, $= 0{,}0010333\, u^2 dt$ oder weil $u = 192^{\text{Toißen}}$; so ist

$$0{,}0010333\, u^2 dt = 0{,}0010333 (192)^2 dt = 38{,}1 dt.$$

Nun ist aber die Geschwindigkeit, welche die Schwere in dem Zeittheilchen dt mittheilet, $= 30^{\text{Fuß}}, 2dt = 5^{\text{T.}}, 03 dt$. Der anfängliche Widerstand der Luft verhält sich also zu dieser Geschwindigkeit $= 38{,}1 : 5{,}03 = 7{,}6 : 1 = 7\frac{3}{5} : 1$, woraus erhellet, daß der anfängliche Widerstand der Luft $7\frac{3}{5}$ mal grösser sey, als das Gewicht der Kugel.

Weil die Kugel von einer Höhe von 14 Fuß, 4 Zoll oder $2^{\text{T.}}, 3888$ heruntergefallen ist, wozu ohngefehr eine Sekunde gehört; so hat der Widerstand der Luft die Schußweite, 192 Toißen, welche im luftleeren Raum statt gefunden haben würde, ohngefehr um $2^{\text{T.}}, 3888 \times 7\frac{3}{5}$ oder beinahe um 18 Toißen verkürzet, weil man annehmen kann, der Widerstand der Luft sey während einer Sekunde beinahe eben so groß gewesen, als im ersten Anfang der

Bewegung. Wenn man nun die Schußweite $176\frac{1}{2}$ Toißen, welche die Versuche angaben, von 192 Toißen abzieht; so findet man den Unterschied $= 15\frac{1}{2}$ Toißen, welches mit dem vorigen sehr wohl übereinstimmt, da der Widerstand der Luft, während der ersten Sekunde, nothwendig um eine gewisse, obgleich kleine Grösse, abgenommen haben muß.

§. 74.

Wenn man, vermittelst der Formel,

$$t = \frac{K^2 \left[e^{\frac{apx}{K^2}} - 1 \right]}{ap \,\text{Cosin.}\, I \sqrt{(2ph)}}$$

die Zeiten berechnet, welche zu den in der vorigen Tabelle berechneten Schußweiten gehören, und dieselbe mit den Zeiten vergleichen will, welche zu Schußweiten gehören, die in einem luftleeren Raum, bei der nehmlichen Grösse der Pulverkraft statt finden würden; so entsteht daraus folgende Tabelle.

Tabelle

in welcher sowohl nach der Theorie des Widerstandes, als auch nach der parabolischen Theorie, die zu den Schußweiten gehörige Zeiten angegeben werden, für die nehmliche Grösse der Pulver-Kraft, welche schon oben §. 51. berechnet worden ist.

Erhöhungs-Winkel.	Zeit nach der Theorie des Widerstandes.	Zeit nach der parabolischen Theorie.
Grad.	Sekunden.	Sekunden.
4.	$5\frac{2}{5}$.	$6\frac{2}{5}$.
15.	$16\frac{1}{5}$.	$23\frac{9}{10}$.
20.	20.	$31\frac{1}{2}$.
25.	$23\frac{9}{10}$.	39.
30.	27.	$46\frac{1}{10}$.
35.	$29\frac{7}{10}$.	$52\frac{9}{10}$.
40.	$33\frac{3}{5}$.	$59\frac{1}{4}$.
45.	$35\frac{3}{4}$.	$65\frac{1}{5}$.
Kern-Schuß.		
Gr. 1. Mi. 11.	$1\frac{9}{17}$.	$1\frac{9}{10}$.

§. 75.

In der vorhergehenden Abhandlung haben wir die Schwere als eine Kraft betrachtet, welche in allen Punkten der krummen Linie einerlei Würkung auf die Kugel äussert und deren Richtungen immer unter sich parallel sind. Beide Voraussetzungen sind, nach geometrischer Schärfe betrachtet, nicht wahr. Indessen sind die Fehler, welche aus dieser Annahme entstehen können, in Absicht der Fehler, welche in der Ausübung unvermeidlich sind, so unbeträchtlich, daß es eine unnütze Arbeit seyn würde, wenn man jene Voraussetzungen nicht annehmen, sondern nach der genauesten geometrischen Methode verfahren wollte.

Denn 1) die gröste Schußweite in den oben angeführten Versuchen ist 2200 Toißen, welches ohngefehr eine Meile macht, deren 25 auf einen Grad gehen und davon eine eigentlich 2283 Toißen ist. Diese Schußweite macht im Mittelpunkt der Erde einen Winkel von 2′ 29″ und die Richtungen der Schwere im Anfangspunkt der krummen Linie und in dem Einfallspunkt schliessen demnach kaum einen Winkel von 2′ 29″ ein.

2) Die gröste Höhe, auf welche die Kugel in diesen Versuchen gestiegen, ist höchstens 1400 Toißen, wenn man die Dichtigkeit der Luft als eine beständige Grösse betrachtet. Weil aber die Dichtigkeit der Luft immer abnimmt, je grösser die Höhe ist, auf welche die Kugel steigt; so wollen wir setzen, die Kugel steige auf eine Höhe, welche um die Helfte grösser ist, als die vorhergehende, das ist, auf eine Höhe von 2100 Toißen, welches sehr unwahrscheinlich ist, daß eine Kugel jemals auf eine

solche Höhe, von beinahe einer Meile, steige. Weil nun die Schwere in dem umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung vom Mittelpunkt der Erde abnimmt; weil ferner der Halbmesser der Erde 1432 Meilen beträgt; so folgt daraus, daß sich die Schwer-Kraft in der Entfernung einer Meile von der Oberfläche der Erde zu der Schwer-Kraft auf der Oberfläche der Erde verhalte

$$= (1432)^2 : (1433)^2 = 1 : 1{,}0014;$$

das heißt, in einer solchen Entfernung oder Höhe ist diese Kraft um $\frac{1}{700}$ vermindert, und diese Verminderung findet nur alsdenn statt, wenn die Kugel in dem höchsten Punkt ihrer Bahn angekommen ist.

Ausführlichere Untersuchungen über die Natur der krummen Linie, welche Kanon-Kugeln und Bomben in ihrer Bahn beschreiben.

§. 76.

In der vorstehenden Abhandlung haben wir einen ersten Versuch geliefert, die Natur der Kugelbahn zu bestimmen. Unsere Absicht ist nunmehr, die vorhin gefundene Gleichung genauer auszudrücken, und die veränderliche Dichtigkeit der Luft in Berechnung zu ziehen. Ehe wir uns aber in diese gedoppelte Untersuchung einlassen, ist es nöthig, auf eine bestimmtere Art, als es §. 43. geschehen ist, zu erklären, welchen Einfluß unsere Näherungs-Methode auf die Bestimmung der Schußweiten habe.

§. 77.

Wir haben §. 43. gesehen, daß, wenn man nur den veränderlichen Theil des Wertes von dx betrachtet, unsere Näherungs-Methode die Schußweiten zu klein angebe; dabei haben wir aber zu gleicher Zeit bemerkt, daß die beständige Grösse, welche man bei der Integrazion addiren muß, und welche selbst von dieser Näherungs-Methode abhängt, viel dazu beitrage, den aus dieser Methode entstehenden Fehler zu ergänzen, und daß mithin selbst

selbst für grosse Erhöhungs-Winkel die Schußweiten mit hinlänglicher Genauigkeit aus jener Gleichung gefunden werden könnten. Diese beständige Grösse trägt aber nicht nur dazu bei, dasjenige zu ergänzen, um welches die Schußweiten nach unserer Näherungs-Methode zu kurz ausfallen, sondern sie verursacht so gar, daß sie etwas grösser ausfallen, als sie seyn sollten, und davon kann man sich folgendergestalt überzeugen.

§. 78.

Wir haben §. 46. gefunden

$$\frac{2apx}{K^2} = \frac{1}{a} \text{ Log. } \left[\frac{C - \frac{2az}{1 - zz}}{C - a \text{ Tang. } I} \right]$$

Obgleich bei sehr grossen Geschwindigkeiten, C eine sehr kleine Grösse ist; so ist sie doch allezeit grösser, als a Tang. I und daher weit grösser als $\frac{2z}{1 - zz}$, in dem aufsteigenden Ast, weil $\frac{2z}{1 - zz}$ immer kleiner als Tang. I ist. Daher kann man setzen:

$$\text{Log. } \left[C - \frac{2az}{1 - zz}\right] = - \frac{a}{C} \times \frac{2z}{1 - zz} - \frac{a^2}{C^2} \times \frac{4z^2}{(1 - zz)^2} \text{ \&c.}$$

$$\text{Log. } [C - a \text{ Tang. } I] = - \frac{a}{C} \text{ Tang. } I - \frac{a^2}{C^2} \times \text{ Tang.}^2 I \text{ \&c.}$$

Daraus

Daraus folgt

$$\text{Log.}\left[\frac{C-\frac{2az}{1-zz}}{C-a\,\text{Tang.}\,I}\right]=\frac{2px}{K^2}=$$

$$\frac{1}{C}\left(\text{Tang.}\,I-\frac{2z}{1-zz}\right)+$$

$$\frac{a}{CC}\left(\text{Tang.}^2\,I-\frac{4z^2}{(1-zz)^2}\right)+\&c.$$

Weil angenommen wird, *a* behalte seinen anfänglichen Wert bei, welcher der gröste ist, den *a* in dem aufsteigenden Ast haben kann; so wird dadurch *a* grösser angenommen, als es in der That ist, und deßwegen findet man die Schußweite des aufsteigenden Asts ebenfalls zu groß. Auf eine ähnliche Art läßt sich darthun, daß bie Abscisse von dem Scheidelpunkt der krummen Linie bis in den Punkt, wo die krumme Linie einen Winkel einschließt, welcher dem Erhöhungs-Winkel des Stüks gleich ist, zu groß; von diesem Punkt an aber, zu klein gefunden werde.

§. 79.

Indessen darf man den daraus entspringenden Fehler für nicht beträchtlich halten. Die Resultate, welche vermittelst dieser Methode, und der folgenden, welche die Schußweiten zu klein angibt, gefunden werden, sind nur bei sehr grossen Geschwindigkeiten merklich verschieden.

Für solche anfängliche Geschwindigkeiten, dergleichen die unten angeführte Versuche, welche mit Mörsern angestellt worden sind, voraussetzen, das heißt, für anfängliche Geschwindigkeiten von 4-500

Fuß

Fuß in einer Sekunde weichen die beide Methoden, bei dem Wert der grösten Schußweite, nur um 6 Toißen von einander ab, und eben bei den grösten Schußweiten ist der Unterschied der Resultate beider Methoden am beträchtlichsten.

Für anfängliche Geschwindigkeiten von 14-1500 Toißen in einer Sekunde, welche beträchtlicher sind, als die anfängliche Geschwindigkeiten der 24pfündigen Kugel in den unten anzuführenden Versuchen, gewesen sind, ist der Unterschied der nach beiden Methoden berechneten grösten Schußweite, ohngefehr 100 Toißen und da vermittelst der ersten Methode die Schußweite zu groß, vermittelst der andern aber zu klein ausfällt; so kann der Fehler, welchen man bei beiden Methoden begeht, ohngefehr auf 50 oder 60 Toißen geschäzt werden.

Daraus erhellet, daß, bei sehr grossen anfänglichen Geschwindigkeiten, die Fehler, welche aus einer jeden dieser beiden Näherungs-Methoden entstehen, kleiner sind, als die in der Praxi unvermeidliche Fehler.

§. 80.

Da die zweite Methode, die Schußweiten zu berechnen, beschwerlicher ist, als die erste, wie wir unten sehen werden, und da der grössere Grad von Genauigkeit, welchen man vermittelst derselben findet, unbeträchtlich ist; so kann man die erstere Methode, die unten angeführte Schußweiten zu berechnen, beibehalten, ohne sich beträchtlichen Fehlern auszusetzen.

Die erstere Methode kann man aber so einrichten, daß sie der zweiten an Genauigkeit sehr nahe

kommt,

kommt, wenn man die Schußweite des aufsteigenden und niedersteigenden Asts, jede besonders berechnet. Die Betrachtungen, welche uns gezeigt haben, daß, vermittelst der ersten Methode die Schußweiten zu groß ausfallen, lehren uns auch, daß, wenn man die Schußweite des aufsteigenden und niedersteigenden Asts, jede besonders berechnet, und die erstere zu groß, die andere aber zu klein findet, der Fehler einigermassen ersezt werde und das Resultat sich demjenigen sehr nähere, welches man vermittelst der zweiten Näherungs-Methode auf einem weit beschwerlicheren Weg findet.

Solchergestalt haben wir die Schußweiten berechnet, dabei aber auch die veränderliche Dichtigkeit der Luft in Betrachtung gezogen.

§. 81.

Es scheint sehr schwer zu seyn, eine direkte Näherungs-Methode anzugeben, den Einfluß der veränderlichen Dichtigkeit der Luft zu berechnen, welche auf die Fälle angewendet werden kann, in welchen die Kanon-Kugeln auf eine solche Höhe steigen, wie die 24pfündige Kugeln, bei grossen Erhöhungs-Winkeln, in den folgenden Versuchen gestiegen sind. Aus Mangel einer direkten Methode kann man sich aber einer indirekten bedienen, deren Genauigkeit in dem gegenwärtigen Fall hinlänglich ist.

Auf die erste Näherungs-Methode werden wir demnach dasjenige anwenden, was wir über die Art, die veränderliche Dichtigkeit der Luft in Betrachtung zu ziehen, sagen wollen, dabei aber, wegen grösserer Genauigkeit, die Schußweite des auf- und niedersteigenden Asts, jede besonders berechnen. Alsdenn werden wir unsere zwote Näherungs-Methode erklä-

erklären, vermittelst welcher die Natur der Kugelbahn weit genauer gefunden werden würde, wenn die Dichtigkeit der Luft in allen Punkten gleich groß wäre. Endlich ist es unsere Absicht, noch zu zeigen, wie man auch bei dieser Methode die veränderliche Dichtigkeit der Luft in Betrachtung ziehen könne. Solchergestalt findet man für die Schußweiten sehr enge Grenzen.

§. 82.

Wir haben oben gefunden

$$\frac{2pdx}{K^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{z+z^3}{(1-zz)^2} - \frac{1}{2}\text{Log.}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

Es sey H der Winkel, welchen die Tangente der krummen Linie in einem beliebigen Punkt mit dem Horizont einschließt; so ist

$$\frac{2z}{1-zz} = \text{Tang.}\,H$$

und $z = \text{Tang.}\,\frac{1}{2}H$

Nun ist

$$\frac{z+z^3}{(1-zz)^2} = \frac{2z}{1-zz} \times \frac{1}{2} \times \frac{1+zz}{1-zz}$$

$$= \frac{1}{2}\text{Tang.}\,H \times \frac{1+\text{Tang.}^2\,\frac{1}{2}H}{1-\text{Tang.}^2\,\frac{1}{2}H} =$$

$$\frac{1}{2}\text{Tang.}\,H \times \frac{\text{Cosin.}^2\,\frac{1}{2}H + \text{Sin.}^2\,\frac{1}{2}H}{\text{Cosin.}^2\,\frac{1}{2}H - \text{Sin.}^2\,\frac{1}{2}H}$$

$$= \frac{1}{2}\text{Tang.}\,H \times \frac{1}{\text{Cosin.}^2\,\frac{1}{2}H - \text{Sin.}^2\,\frac{1}{2}H}$$

Aber

$$\text{Cosin.}^2\,\frac{1}{2}H - \text{Sin.}^2\,\frac{1}{2}H = \text{Cosin.}\,H.$$

Mithin

Mithin

$$\frac{z+z^3}{(1-zz)^2} = \frac{\frac{1}{2}\text{Tang.}\,H}{\text{Cosin.}\,H} = \tfrac{1}{2}\text{Tang.}\,H\,\text{Sec.}\,H$$

Ferner

$$\text{Log.}\,\frac{1+z}{1-z} = \text{Log.}\,\frac{1+\text{Tang.}\,\frac{1}{2}H}{1-\text{Tang.}\,\frac{1}{2}H} =$$

$$\text{Log. Tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}H)$$

Wir erhalten demnach

$$\frac{2pdx}{K^2} = \frac{-\,d.\,\text{Tang.}\,H}{C - \frac{1}{2}\text{Tang.}\,H\,\text{Sec.}\,H - \frac{1}{2}\text{Log. Tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}H)}$$

oder $\frac{2pdx}{K^2} =$

$$\frac{-\,d\,\text{Tang.}\,H}{C - \text{Tang.}\,H(\frac{1}{2}\text{Sec.}\,H + \frac{1}{2}\text{Cot.}\,H\,\text{Log. T.}(45^\circ + \frac{1}{2}H))}$$

wo $\frac{1}{2}\text{Sec.}\,H + \frac{1}{2}\text{Cotang.}\,H\,\text{Log. Tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}H)$ eben die Grösse ist, welche wir oben durch a bezeichnet und als eine beständige Grösse angenommen haben, welche ihren anfänglichen Wert beibehält. Diese Grösse ist zwar keineswegs beständig; Indessen ist der Fehler, welcher aus dieser Voraussetzung entsteht, unbeträchtlich, wie wir schon gesehen haben und wie noch deutlicher erhellet, wenn man 1) bemerkt, daß bei sehr grossen Geschwindigkeiten, der Winkel H erst alsdenn merklich verändert wird, wenn die Kugel schon einen grossen Theil des aufsteigenden Asts durchlauffen hat, 2) daß der Fehler, welcher daraus in dem Wert von dx entsteht, der Veränderung von a bei weitem nicht proportional ist. Dieser Fehler wächst bis auf einen gewissen Punkt, worauf er abnimmt und endlich

ganz

ganz verschwindet. Alsdenn wächst er wieder bis zu einem gewissen Punkt, nimmt wieder ab und verschwindet. In dem lezten Theil des niedersteigenden Asts wächst er wieder, und hat den entgegengesezten Einfluß auf die Schußweiten. Alles dieses sieht man leicht, wenn man die Gleichung

$$\frac{2pdx}{K^2} = \frac{-\ d\,\text{Tang.}\,H}{C - a\,\text{Tang.}\,H}$$

mit der Gleichung $\frac{2pdx}{K^2} =$

$$\frac{-\ d\,\text{Tang.}\,H}{C - \text{T}.\,H\left[\frac{1}{2}\text{Sec.}\,H + \frac{1}{2}\text{Cot.}\,H\,\text{Log.}\,\text{T.}\ 45^\circ + \frac{1}{2}H)\right]}$$

vergleicht und bemerkt, daß beide Gleichungen in drei Punkten der krummen Linie völlig einerlei sind, nehmlich in dem Wurfspunkt, in dem Scheidelpunkt und in demjenigen Punkt des niedersteigenden Asts, welcher mit dem Horizont einen Winkel einschließt, der dem Erhöhungs-Winkel des Kanons gleich ist.

§. 83.

Wenn demnach die Dichtigkeit der Luft eine beständige Grösse ist; so kann man die Natur der krummen Linie durch die Gleichung

$$\frac{2pdx}{K^2} = -\frac{d\,\text{Tang.}\,H}{C - a\,\text{Tang.}\,H}$$

ausdrucken, wo

$$a = \tfrac{1}{2}\text{Sec.}\,I + \tfrac{1}{2}\text{Cotang.}\,I\,\text{Log. Tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}I)$$

und I der Erhöhungs-Winkel des Kanons ist.

§. 84.

Um diese Gleichung auch für den Fall einzurichten, wenn die Dichtigkeit der Luft veränderlich ist; so wollen

 wir

wir annehmen, sie behalte in solchem Fall eben die Gestalt und sey von der vorigen nur durch die beständige Grössen, welche in der Gleichung vorkommen, verschieden. Anstatt also

$$dx = \frac{\frac{K^2}{2p} \times - d\,\text{Tang.}\,H}{C - a\,\text{Tang.}\,H}$$

zu setzen, will ich

$$dx = \frac{-\,d\,\text{Tang.}\,H}{A - B\,\text{Tang.}\,H}$$

setzen.

Diese Hypothesis ist deßwegen erlaubt, weil die Veränderung der Dichtigkeit nicht beträchtlich ist und daher die Gleichung der krummen Linie im Fall einer unveränderlichen Dichtigkeit von der Gleichung derjenigen krummen Linie nur wenig verschieden seyn kann, welche bei veränderlicher Dichtigkeit würklich statt findet.

Man setze $\frac{2p}{K^2} = 2D$; so erhält man $dx =$

$$\frac{-\frac{1}{2D}\,d\,\text{Tang.}\,H}{C - \text{Tang.}\,H\left[\tfrac{1}{2}\text{Sec.}\,H + \tfrac{1}{2}\text{Cot.}\,H\,\text{Log.}\,\text{T.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}H)\right]}$$

Die Grössen A und B bestimme ich vermittelst folgender Bedingungen:

1) In dem Anfangspunkt der Abscissen muß die Dichtigkeit oder die Grösse $2D$, welche der Dichtigkeit proportional ist, dem bekannten Wert derselben in diesem Punkt, gleich seyn.

2) In

2) In dem Scheidelpunkt der krummen Linie, wo $H = 0$, muß die Dichtigkeit oder die Grösse $2D$, welche derselben proportional ist, dem Wert, welchen sie in diesem Punkt hat, und den ich durch $2D'$ bezeichne, gleich seyn.

Wir erhalten demnach die beide Gleichungen

$$\frac{-d \,\text{Tang.}\, H}{A - B \,\text{Tang.}\, I} = \frac{-\frac{1}{2D} d \,\text{Tang.}\, H}{C - a \,\text{Tang.}\, I}$$

weil $a = \frac{1}{2} \text{Sec.}\, I + \frac{1}{2} \text{Cotang.}\, I \,\text{Log. T.}\, (45° + \frac{1}{2} I)$ und

$$-\frac{d \,\text{Tang.}\, H}{A} = -\frac{1}{2D'} \cdot \frac{d \,\text{Tang.}\, H}{C}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$A = 2CD' \text{ und } B = 2Da - \frac{2C(D - D')}{\text{Tang.}\, I}$$

Da nunmehr A und B bestimmt sind; so findet man aus der Gleichung

$$dx = \frac{-d \,\text{Tang.}\, H}{A - B \,\text{Tang.}\, H}$$

leicht

$$x = C' + \frac{1}{B} \text{Log.}\, (A - B \,\text{Tang.}\, H)$$

$$= \frac{1}{B} \text{Log.} \left[\frac{A - B \,\text{Tang.}\, H}{A - B \,\text{Tang.}\, I}\right]$$

wo man nehmlich die beständige Grösse C' aus der Bedingung bestimmt, daß $x = 0$, wenn $H = I$.

§. 85.

Vermittelst dieser Gleichung ist man nur im Stande, die Schußweite des aufsteigenden Asts

zu berechnen. Man setze Tang. $H = 0$ und bezeichne diese Schußweite mit X; so wird

$$X = \frac{1}{B} \text{Log.} \frac{A}{A - B \text{ Tang. } I}$$

Da $A - B$ Tang. $I = 2D(C - a \text{ Tang.} I)$ und $C - a$ Tang. $I = \frac{K^2}{4ph \text{ Cosin.}^2 I} = \frac{1}{4Dh \text{ Cosin.}^2 I}$; so erhalten wir

$$X = \frac{1}{B} \text{ Log. } 2Ah \text{ Cosin.}^2 I$$

§. 86.

Ehe wir die Schußweite des niedersteigenden Asts berechnen können, ist es nöthig, daß man den Wert der grösten Ordinate oder der grösten Höhe kenne, auf welche die Kugel steigt.

Nun ist überhaupt

$$\frac{dy}{dx} = \text{Tang. } H$$

oder $dy = dx$ Tang. H

Weil $dx = \frac{- d \text{ Tang. } H}{A - B \text{ Tang. } H}$; so ist

$$dy = - \frac{\text{Tang. } H \, d \text{ Tang. } H}{A - B \text{ Tang. } H} =$$

$$\frac{d \text{ Tang. } H}{B} - \frac{A}{B} \frac{d \text{ Tang. } H}{A - B \text{ Tang. } H},$$

woraus folgt

$$y = C'' + \frac{\text{Tang. } H}{B} + \frac{A}{BB} \text{ Log.} [A - B \text{ Tang.} H]$$

Und

Und weil $y = 0$, wenn $H = I$; so ist

$$y = \frac{\text{Tang.}\, H - \text{Tang.}\, I}{B} + \frac{A}{BB} \times$$

$$\text{Log.} \left[\frac{A - B\,\text{Tang.}\, H}{A - B\,\text{Tang.}\, I}\right]$$

Wenn $H = 0$; so sey Y die grösste Ordinate. Man erhält also

$$Y = -\frac{\text{Tang.}\, I}{B} + \frac{A}{BB}\,\text{Log.}\,\frac{A}{A - B\,\text{Tang.}\, I}$$

oder

$$Y = -\frac{\text{Tang.}\, I + AX}{B}$$

§. 87.

Um die Gleichung für den niedersteigenden Ast zu finden; so bedenke man, daß die Kugel sich in dem Scheidelpunkt nach horizontaler Richtung mit einer gewissen Geschwindigkeit bewegt. Weil nun überhaupt $dx =$

$$\frac{-\frac{1}{2D}\, d\,\text{Tang.}\, H}{C - \text{Tang.}\, H\left[\frac{1}{2}\text{Sec.}\, H + \frac{1}{2}\text{Cot.}\, H\,\text{Log. T.}(45° + \frac{1}{2}H)\right]}$$

H aber, für den niedersteigenden Ast, eine verneinte Grösse ist; so erhalten wir $dx =$

$$\frac{\frac{1}{2D'}\,\text{Tang.}\, H}{C' + \text{Tang.}\, H\left[\frac{1}{2}\text{Sec.}\, H + \frac{1}{2}\text{Cot.}\, H\,\text{Log. T.}(45° + \frac{1}{2}H)\right]}$$

wo C' die beständige Grösse ist, welche man in diesem Fall addiren muß, und welche wir unten bestimmen werden.

§. 88.

Ich nehme, wie oben, an, daß

$$dx = \frac{d\,\text{Tang.}\,H}{A' + B'\,\text{Tang.}\,H}$$

und bestimme A', B' aus der Bedingung, daß die Dichtigkeit oder die Grösse $\frac{2p}{K^2}$, welche derselben proportional ist, durch $2D'$ im Scheidelpunkt und durch $2D$ im Einfallspunkt bezeichnet werde.

Wenn demnach in dem Einfallspunkt der Wert von

$\frac{1}{2}\text{Sec.}\,H + \frac{1}{2}\,\text{Cotang.}\,H\ \text{Log. Tang.}\,(45° + \frac{1}{2}H)$

durch a' vorgestellet wird; so erhalten wir folgende Gleichungen, vermittelst deren man A' und B' bestimmen kann,

$$\frac{\frac{1}{2D'}\,d\,\text{Tang.}\,H}{C'} = \frac{d\,\text{Tang.}\,H}{A'}$$

und

$$\frac{\frac{1}{2D}\,d\,\text{Tang.}\,H}{C' + a'\,\text{Tang.}\,I'} = \frac{d\,\text{Tang.}\,H}{A' + B'\,\text{Tang.}\,I'}$$

wo I' der Einfalls-Winkel ist.

Aus diesen Gleichungen findet man

$$A' = 2C'D'$$

$$B' = 2Da' + \frac{2C'(D - D')}{\text{Tang.}\,I'}$$

Nunmehr müssen wir C' bestimmen.

§. 89.

Wir haben oben gefunden

$$\frac{K^2dt^2}{2dx^2} = C - \frac{z + z^3}{(1 - zz)^2} - \tfrac{1}{2}\text{Log.}\frac{1+z}{1-z}$$

oder $\frac{K^2dt^2}{2dx^2} =$

$$C - \text{Tang}\,H[\tfrac{1}{2}\text{Sec.}H + \tfrac{1}{2}\text{Cot.}H\,\text{Log.T.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}H)]$$

Nun ist, vermöge der Voraussetzung,

$$\frac{1}{A - B\,\text{Tang.}H} = \frac{1}{2D[C - \text{Tang.}H(\tfrac{1}{2}\text{Sec.}H + \&c.)]}$$

daher

$$\frac{K^2dt^2}{2dx^2} = \frac{A - B\,\text{Tang.}H}{2D}$$

In dem Scheidelpunkt der krummen Linie ist also

$$\frac{dt^2}{2dx^2} = \frac{A}{2DK^2}$$

Für den niedersteigenden Ast findet man

$$C' + \text{Tang.}H(\tfrac{1}{2}\text{Sec.}H + \&c.) = \frac{K^2dt^2}{2dx^2}$$

$$= \frac{A' + B'\,\text{Tang.}H}{2D'}$$

In dem Scheidelpunkt ist

$$\frac{K'^2dt^2}{2dx^2} = \frac{A'}{2D'} \text{ und } \frac{A'}{2D'} = C'$$

Daraus folgt

$$\frac{dt^2}{2dx^2} = \frac{A'}{2D'K'^2} = \frac{A}{2DK^2}$$

 Weil

Weil nun $\frac{p}{K^2} : \frac{p}{K'^2} = D : D'$; so ist $D'K'^2 = DK^2$, $A' = A$ und $C' = \frac{A'}{2D'} = \frac{A}{2D'} = C$.

Daraus folgt endlich

$$A' = 2CD' \text{ und } B = 2a'D + \frac{2C(D - D')}{\text{Tang. } I'}$$

Wir werden bald zeigen, wie man a' und Tang. I' finde.

§. 90.

Weil $dx = \frac{d\,\text{Tang. } H}{A' + B'\,\text{Tang. } H}$; so ist

$$x = \frac{1}{B'} \text{ Log. } \frac{A' + B'\,\text{Tang. } H}{A'}$$

wenn man bedenkt, daß $x = 0$, wenn Tang. $H = 0$, für die Schußweite der niedersteigenden Bahn.

Ferner ist $\frac{dy}{dx} = -$ Tang. H

$$dy = -dx \text{ Tang. } H$$

$$= -\frac{\text{Tang. } H}{A' + B'\,\text{Tang. } H} \times d\,\text{Tang. } H$$

$$= -\frac{1}{B'}\, d\,\text{Tang. } H + \frac{A'}{B'}\, \frac{d\,\text{Tang. } H}{A' + B'\,\text{Tang. } H}$$

und

$$y = C'' - \frac{1}{B'} \text{ Tang. } H + \frac{A'}{B'B'} \times \text{Log. } (A' + B'\,\text{Tang. } H)$$

Wenn

Wenn Tang. $H = 0$; so ist

$$y = Y \text{ ; daher}$$

$$y = Y - \frac{\text{Tang.}\, H}{B'} + \frac{A'}{B'B'} \text{Log.} \frac{(A' + B' \text{Tang.}\, H)}{A'}$$

Sucht man aus der Gleichung

$$x = \frac{1}{B'} \text{Log.} \left(\frac{A' + B' \text{Tang.}\, H}{A'} \right)$$

die Werte von

$$\text{Log.} \left(\frac{A' + B' \text{Tang.}\, H}{A'} \right)$$

und von Tang. H; so findet man

$$y = Y + \frac{A'}{B'} x - \frac{A'}{B'B'} \left(e^{B'x} - 1 \right)$$

wo nehmlich e die Zahl ist, deren Logarithmus $= 1$.

Die Ordinate Y ist aus der Gleichung

$$Y = \frac{AX - \text{Tang.}\, I}{B}$$

gegeben. Man findet daher den zweiten Theil x der Schußweite, oder die Schußweite des niedersteigenden Asts, wenn man in die Gleichung

$$y = Y + \frac{A'}{B'} x - \text{\&c.}$$

nach und nach solche Werte von x setzet, bis man einen findet, wodurch $y = 0$ wird.

§. 91.

Da aber die Werte von A' und B' von den Grössen D, D', a, a', Tang. I, Tang. I' abhangen;

gen; so muß man vordersamst diese lezte finden können.

Aus dem Wert von $\frac{p}{K^2}$ findet man unmittelbar die Grösse D.

Und D' verhält sich zu D wie die Dichtigkeit der Luft im Scheidelpunkt der krummen Linie zu ihrer Dichtigkeit im Anfangspunkt der Abscissen. Es ist aber in der gegenwärtigen Untersuchung hinreichend genau, wenn man für die Dichtigkeit der Luft im Scheidelpunkt der krummen Linie diejenige Dichtigkeit nimmt, welche für den höchsten Punkt der Ordinate gehört, so in der Voraussetzung einer unveränderlichen Dichtigkeit gefunden worden. Man suche also vermittelst des 66. §phen die gröste Ordinate und vermittelst der Formel

$$\Delta = e^{-\frac{Y}{aH}}$$

die Dichtigkeit in dem höchsten Punkt der Ordinate; so findet man D'.

Es ist hinlänglich, wenn man Tang. I' nur beinahe kennt. Man kann also für I' den Einfalls-Winkel nehmen, welcher in der Voraussetzung einer unveränderlichen Dichtigkeit der Luft statt findet, einen Winkel, welchen man leicht findet, wenn nur einmal die Schußweite, welche in solcher Voraussetzung statt findet, vermittelst der Methode §. 46. gefunden worden. Denn wenn man die Gleichung

$$y = x\left(\text{Tang.}\, I + \frac{K^2}{4aph\, \text{Cos.}^2 I}\right) - \frac{K^4}{8a^2p^2h\, \text{Cos.}^2 I}\left(e^{\frac{2apx}{K^2}} - 1\right)$$

diffe-

differenziirt; so findet man

$$\frac{dy}{dx} = \text{Tang.}\,I - \frac{K^2}{4aph\,\text{Cos.}^2 I}\left(e^{\frac{2apx}{K^2}} - 1\right)$$

Nun ist überhaupt $\frac{dy}{dx}$ die Tangente des Winkels, welchen die Tangente der krummen Linie in jedem Punkt mit dem Horizont einschließt. Es ist also $\frac{dy}{dx}$ die Tangente des Einfalls-Winkels, wenn man in die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \text{Tang.}\,I - \&c.$$

den Wert von x setzet, welcher in der Gleichung

$$y = x\,(\text{Tang.}\,I + \&c.) - \&c.$$

zu $y = 0$ gehört, das heißt die Schußweite in der Voraussetzung einer unveränderlichen Dichtigkeit.

Daraus findet man auch leicht

$$a' = \tfrac{1}{2}\text{Sec.}\,I' + \tfrac{1}{2}\text{Cot.}\,I'\ \text{Log. Tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}I')$$

wenn man auf die vorhergehende Art I' gefunden hat.

§. 92.

Weil der Wert von a bei Berechnung der Schußweiten zu wissen nöthig ist; so haben wir beistehende Tabelle berechnet, welche nicht ohne grossen Nutzen seyn wird.

§. 93.

Bei Berechnung der Schußweiten verfährt man demnach folgendergestalt, wenn man die veränderliche Dichtigkeit der Luft in Betrachtung zieht.

Wann

Wann der Wert von $\frac{p}{K^2}$ auf solche Art berechnet ist, wie §. 50. gezeigt worden: wenn h gegeben ist oder vermittelst der Methode §. 51. gefunden worden ist; so berechne man zuvorderst die Schußweiten, die gröste Ordinaten und die Einfalls-Winkel in der Voraussetzung einer unveränderlichen Dichtigkeit, wie wir in dem 54. 66. und 91. §phen gezeigt haben.

Wenn man die gröste Ordinate weiß; so kann man vermittelst der Formel

$$\Delta = e^{\frac{-Y}{aH}}$$

die Dichtigkeit der Luft im Scheidelpunkt der krummen Linie finden. Daraus ergiebt sich der Wert von $2D'$; und $2D$ kennt man so.

Die beständige Grösse C findet man aus der Formel

$$C = \frac{K^2}{4ph \operatorname{Cos.}^2 I} + a \operatorname{Tang.} I$$

Aus dem Erhöhungs-Winkel findet man den Wert von a und aus dem Einfalls-Winkel den Wert von a'. Dadurch findet man alle Grössen, welche in den Werten von A, A', B, B' vorkommen und mithin diese Grössen selbst.

Die Schußweite X des aufsteigenden Asts und die gröste Ordinate Y findet man aus den Gleichungen

$$X = \frac{1}{B} \operatorname{Log.} 2Ah \operatorname{Cos.}^2 I$$

und

$$Y = \frac{AX - \operatorname{Tang.} I}{B}$$

Wenn

Wenn diese Grössen berechnet sind; so findet man die Schußweite des niedersteigenden Asts aus der Gleichung

$$y = Y + \frac{A'X}{B'} - \frac{A'}{B'B'}\left(e^{B'x} - 1\right)$$

in welche man für x nach und nach mehrere Werte sezt, bis man einen findet, wo $y = 0$ wird. Dieß ist der andere Theil der Schußweite, welchen man zu X addiren muß, um die ganze Schußweite zu bekommen.

Auf solche Art haben wir die Schußweiten der Kanon-Kugeln berechnet, welche in der zweiten Tabelle angezeigt sind und dieselbe mit den Versuchen verglichen, welche in dem Monat October des Jahrs 1771. auf den Befehl des Marquis von Monteynard, damaligen königlich französischen Kriegs-Ministers und unter der Ober-Aufsicht des Herrn von Beauvoir, Brigadier bei der Armee, und Obersten-Befehlshaber der Artillerie-Schule, zu La Fère angestellt worden sind.

Die vier und zwanzig pfündige Kugel hatte 5 Zoll, 5 im Durchmesser, die Pulverladung war 8½ Pfund.

§. 94.

Die Wurfs-Weiten der Bomben, welche in der ersten Tabelle enthalten sind, haben wir in der Voraussetzung einer unveränderlichen Dichtigkeit der Luft berechnet, weil die Höhen, auf welche die Bomben bei den grösten Erhöhungs-Winkeln gestiegen, so groß nicht sind, daß die veränderliche Dichtig-

tigkeit der Luft einen beträchtlichen Einfluß haben könnte.

Die Bomben, deren man sich bei diesen Versuchen bediente, hatten 11 Zoll, 10 Linien im Durchmesser. Das Gewicht derselben, die Erde, womit sie gefüllt waren, dazu gerechnet, betrug 142 Pfund; die Pulverladung $3\frac{3}{4}$ Pfund.

§. 95.

Um ein richtiges Urtheil fällen zu können, wie weit die parabolische Theorie von der Wahrheit abweiche, haben wir auch die Wurfs-Weiten in der Voraussetzung, daß die Luft der Bewegung der Bombe gar keinen Widerstand entgegen setze, berechnet. Da wir in der Nachricht, welche über diese Versuche aufgesezt worden, bemerket haben, daß die Schußweiten unter 10 und 20 Grad Erhöhung, fehlerhaft seyen; so haben wir weder den einen, noch den andern Winkel, sondern den Erhöhungs-Winkel von 30 Grad erwählt, um die Grösse der Pulverkraft zu bestimmen und sind dabei nach der Methode §. 51. verfahren. Daraus haben wir $h =$ 370 Toißen gefunden. Die anfängliche Geschwindigkeit der Bombe war also 366 Fuß in einer Sekunde. Denn es ist $V^2 = 2ph$.

Der Wert von $\frac{p}{K^2}$ ist folgender Gestalt berechnet worden. Man erinnere sich, daß $\frac{p}{K^2} = \frac{DS}{2M}$. Es sey der Durchmesser der Bombe, $= 2r$; das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie $= 1 : c$; so ist cr^2 der Innhalt eines grösten Kreises

ses der Bombe. Man findet also $S = \frac{1}{2}cr^2$. Der Innhalt der Bombe ist $\frac{4}{3}cr^3$ und wenn die specifische Schwere der Materie, woraus die Bombe besteht, mit D' bezeichnet wird; so ist $\frac{4}{3}cr^3D'$ die Masse M der Bombe. Daher

$$\frac{p}{K^2} = \frac{DS}{2M} = \frac{D \times \frac{1}{2}cr^2}{2 \times \frac{4}{3}cr^3 D'}$$

$$= \frac{3}{16} \times \frac{D}{rD'} = \frac{3}{8} \times \frac{D}{D'} \times \frac{1}{2r}.$$

Weil ein Cubicfuß Luft $\frac{70}{850}$ Pfund wiegt; so ist das Gewicht des Luftkörpers, dessen Raum die Bombe einnimmt, $= \frac{4}{3}cr^3 \times \frac{70}{850}$ Pfund, wenn r in Fuß gegeben ist. Das Gewicht der Bombe, deren man sich bei diesen Versuchen bediente, war 142 Pfund. Man erhält also

$$D : D' = \frac{4}{3}cr^3 \times \frac{70}{850} : 142,$$

woraus folgt

$$\frac{D}{D'} = \frac{\frac{4}{3}cr^3 \times 7}{85 \times 142};$$

und weil der Durchmesser dieser Bombe = 11 Zoll, 10 Linien $= 0^{\text{Fuß}},986111$ war; so findet man

$$\frac{D}{D'} = 0,00029325$$

und mithin

$$\frac{p}{K^2} = \frac{3}{8} \times 0,00029325 \times \frac{1}{0^{\text{Fuß}},98611}$$

$$= \frac{3}{8} \times 0,00029325 \times \frac{1}{0^{\text{Toiß.}},164352}$$

$$= 0,0004812.$$

§. 96.

§. 96.

Um noch mehr Gelegenheit zu haben, die Theorie mit den Versuchen zu vergleichen, haben wir auch die Zeiten berechnet, in welchen die Bomben ihre Bahnen vollendet haben. §. 69.

§. 97.

Aus dieser Tabelle erhellet, daß beinahe alle berechnete Wurfs-Weiten unter die beobachtete fallen, einige wenige ausgenommen, welche diese Grenzen überschreiten. Jedoch ist dieser Unterschied sehr mäßig und niemal grösser, als der Unterschied der beobachteten Wurfs-Weiten selbst. Die Sache verhält sich ganz anders, wenn der Widerstand der Luft Null angenommen wird.

Ferner erhellet, wie schön die Theorie mit der Erfahrung bei den Zeiten übereinkomme, in welchen die Bomben ihre Bahnen vollendet haben.

§. 98.

Wir werden nunmehr auch einige Bemerkungen über die zweite Tabelle, welche die Schußweiten der Kanon-Kugeln enthält, beifügen.

Um die Grösse der Pulverkraft so genau als möglich zu bestimmen, haben wir h aus der mittlern Schußweite unter 5 Grad Erhöhung, alsdenn aus der mittlern Schußweite unter 10 Grad Erhöhung berechnet und von diesen beeden Werten von h den mittlern genommen. Wir sind dabei nach der Methode §. 51. verfahren, und haben also die veränderliche Dichtigkeit der Luft, welche unter diesen Er-

höhungs-

höhungs-Winkeln keinen beträchtlichen Einfluß haben kann, nicht in Betrachtung gezogen. Da der Wert von h solchergestalt aus 8 beobachteten Schußweiten gefunden wird; so ist er so genau, als es hier nöthig ist, berechnet. Wir haben gefunden $h = 4393$ Toißen, woraus erhellet, daß die anfängliche Geschwindigkeit der 24pfündigen Kugel, bei einer Ladung von $8\frac{1}{2}$ Pfund Pulver so groß war, daß dieselbe in einem luftleeren Raum 1262 Fuß in einer Sekunde hätte durchlauffen können.

§. 99.

Da der Durchmesser der 24pfündigen Kugel, davon oben die Rede war, $= 5^{\text{Zoll}},444$ und der Durchmesser der 24pfündigen Kugel, deren man sich bei diesen Versuchen bediente, $= 5^{\text{Zoll}},5$ ist; so muß man den Wert von $\frac{p}{K^2}$, welchen wir oben §. 50. gefunden haben, in dem Verhältniß von 5,5 : 5,444 vermindern, weil $\frac{p}{K^2} = \frac{3}{8} \times \frac{D}{D'} \times \frac{1}{2r}$. Man findet also

$$\frac{p}{K^2} = 0{,}00081189.$$

§. 100.

Aus diesen gegebenen Grössen und vermittelst der Methode §. 54 und 66. haben wir die Schußweiten und die gröste Höhen, auf welche die Kugel in der Voraussetzung einer unveränderlichen Dichtigkeit der Luft hätte steigen müssen, berechnet. So-

wohl die Schußweiten, als diese Höhen werden dadurch grösser gefunden, als sie seyn sollten, wie wir schon öfters bemerkt haben. Da aber diese Berechnung keine andere Absicht hat, als den Einfalls-Winkel und die Dichtigkeit der Luft im Scheidelpunkt der krummen Linie zu bestimmen; so ist, für diese Absicht, die gebrauchte Methode hinreichend genau. Die gefundene Resultate haben wir in beistehender Tabelle angezeigt. Bei Berechnung der Schußweiten in der Voraussetzung einer veränderlichen Dichtigkeit der Luft haben wir uns der Methode bedient, welche wir §. 84. u. s. w. erklärt haben.

§. 101.

Aus dieser Tabelle erhellet auch, wie erstaunlich groß der Widerstand der Luft sey. Aus der vorher bestimmten Grösse der Pulverkraft kann man die Schußweiten bestimmen, welche in einem luftleeren Raum statt finden würden. Unter dem Erhöhungs-Winkel von 45 Grad hätte die Schußweite 8786 Toißen seyn müssen, im luftleeren Raum. Aus unserer Theorie findet man diese Schußweite = 1984 Toißen und die Versuche geben für die mittlere Schußweite 2054 Toißen an. Die Theorie des Widerstandes gibt also ein Resultat, welches höchstens um 70 Toißen von dem Versuch abweicht; da hingegen die parabolische Theorie ein Resultat giebt, welches von dem Versuch um 6732 und von der neuern Theorie um 6802 Toißen abweicht.

§. 102.

Wenn man die berechnete Schußweiten mit den beobachteten vergleicht; so wird man finden, daß sie über-

überhaupt so genau mit einander übereinstimmen, als es von Versuchen, welche so vielen praktischen Schwierigkeiten unterworfen sind, zu hoffen ist. Man kann zwar in die sorgfältige Genauigkeit, mit welcher man bei diesen Versuchen zu Werke gieng, keine Zweifel setzen. Indessen ist es, wie der einsichtsvolle Mann, der die Ober-Aufsicht über dieselbe hatte, selbst gestehet, gewiß, daß es, aller Sorgfalt ohngeachtet, welche man anwendet, um alle Umstände gleich zu machen, doch einige gibt, von deren Unregelmäßigkeit man sich nicht versichern kann, und deren Einfluß doch sehr beträchtlich ist.

Solchen Ursachen muß man ohne Zweifel zwo Ungleichheiten zuschreiben, welche sich bei den beobachteten Schußweiten unter 35 und 43 Grad befinden. 1) Die Schußweiten unter 35 Grad scheinen überhaupt kleiner zu seyn, als die Schußweiten unter 30 Grad, obgleich sie weit grösser seyn sollten, wie es die Versuche selbst darthun, da die Schußweiten unter 40° weit grösser sind. 2) Die Schußweiten unter 43° sind weit grösser, als die Schußweiten unter 40°, als es scheint, daß sie es seyn sollten. Es ist aber unwiedersprechlich, daß in der Nähe des Maximi der Schußweiten, die Unterschiede weit kleiner seyn müssen, als irgendwo. Man sieht dieß augenscheinlich, wenn man die dreierlei Arten von berechneten Schußweiten, welche in dieser Tabelle enthalten sind, mit einander vergleicht. Welche Hypothesis über den Widerstand der Luft man auch annimmt; so wird man immer dieses Gesez wahr finden.

§. 103.

Die Uebereinstimmung der zwölf andern berechneten Schußweiten mit den beobachteten zeigt, daß

daß diese Theorie mit der Erfahrung so genau übereinstimme, als man wünschen kann und wenn man die in der Praxi unvermeidliche Fehler betrachtet; so wird man in die Versuchung geführt, zu glauben, daß auch eine weit schärfere Theorie mit der Erfahrung nicht besser, als die gegenwärtige, übereinstimmen werde.

§. 104.

Aus dieser Tabelle und aus der nächstvorhergehenden über die Wurfsweiten der Bomben erhellet, daß der Erhöhungs-Winkel, unter welchen man die gröste Schußweite erlangt, von demjenigen, welcher in einem luftleeren Raum statt finden würde, sehr verschieden ist. Und hierinn stimmt die Erfahrung mit der Theorie überein, obgleich beide nicht einerlei Resultat geben. Es scheint aber nicht wahrscheinlich zu seyn, daß Versuche jemals diesen Winkel bestimmen werden. Denn da in der Nähe dieses Winkels die Unterschiede der Schußweiten nothwendig sehr klein seyn müssen; so werden dieselbe noch unbeträchtlicher seyn, als die Unterschiede, welche Versuche bei Schußweiten unter einerlei Erhöhungs-Winkeln angeben.

§. 105.

Bei Berechnung der Zeiten, in welchen die Kugeln ihre Bahnen vollendet, haben wir die veränderliche Dichtigkeit der Luft nicht in Betrachtung gezogen, nicht sowohl deßwegen nicht, weil die Berechnungen etwas beschwerlicher gewesen, sondern weil der Unterschied unbeträchtlich ist.

Die beobachtete Zeiten, welche in der Tabelle angezeigt sind, sind die mittlere Werte von denen,

welche

welche für jede von den 4 angezeigten Schußweiten, bei einerlei Erhöhungs-Winkel, gefunden worden sind.

§. 106.

In dem 76 §phen haben wir versprochen, zu zeigen, wie man die Natur dieser krummen Linie, in der Voraussetzung einer unveränderlichen Dichtigkeit der Luft, noch genauer bestimmen könne.

Es ist $dx =$

$$\frac{-\frac{K^2}{2p}\, d\,\text{Tang.}\, H}{C - \text{Tang.}\, H[\frac{1}{2}\text{Sec.}\, H + \frac{1}{2}\text{Cot.}\, H\,\text{Log. T.}(45^\circ + \frac{1}{2}H)]}$$

Wir wollen annehmen, es sey

$$\tfrac{1}{2}\text{Sec.}\, H + \tfrac{1}{2}\text{Cotang.}\, H\,\text{Log. Tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}H) = 1 + A\,\text{Tang.}^2 A$$

Aus der Tabelle, in welcher die Werte von a für verschiedene Erhöhungs-Winkel angegeben werden, erhellet, daß A eine sehr kleine Grösse ist, und daß diese Grösse, während die Kugel ihre Bahn beschreibt, nur wenig verändert wird. Wir können sie also in der ganzen krummen Linie als eine beständige Grösse betrachten und derselben am füglichsten den Wert beilegen, welchen sie in dem Wurfspunkt hat.

Wir setzen also $A =$

$$\frac{-1 + \frac{1}{2}\text{Sec.}\, I + \frac{1}{2}\text{Cot.}\, I\,\text{Log. Tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}I)}{\text{Tang.}^2\, I}$$

$$= \frac{a - 1}{\text{Tang.}^2 I} = (a - 1)\,\text{Cotang.}^2 I.$$

Mithin ist

$$\frac{2p\,dx}{K^2} = \frac{-d\,\text{Tang.}\, H}{C - \text{Tang.}\, H - A\,\text{Tang.}^3\, H}$$

 §. 107.

§. 107.

Nun bemerke ich 1) daß dieser Wert von dx, welcher dem wahren Wert sehr nahe kommt, mit demselben in drei Punkten der krummen Linie völlig einerlei sey, nehmlich in dem Wurfspunkt, in dem Scheidelpunkt und in demjenigen Punkt des niedersteigenden Astes, welcher mit dem Horizont einen Winkel einschließt, der dem Erhöhungswinkel des Stüks gleich ist.

2) Daß, da der Wert, welchen wir der Grösse A beigelegt haben, der kleinste Wert ist, welchen diese Grösse in dem aufsteigenden Ast haben kann, der Nenner des Werts von dx etwas grösser sey, als er seyn sollte; woraus folgt, daß die in dieser Voraussetzung berechnete Schußweiten kleiner sind, als sie nach der schärfsten Theorie seyn würden. Vermittelst dieser Methode und der §. 54 u. s. w. vorgetragenen kann man also für die Schußweiten sehr enge Grenzen finden.

§. 108.

Wir schreiten nunmehr zur Integrazion.

Man setze $A = \frac{1}{B}$ so findet man

$$\frac{2pdx}{K^2} = \frac{B d \text{ Tang. } H}{- BC + B \text{ Tang. } H + \text{Tang.}^3 H}$$

Es sey c eine mögliche Wurzel der Gleichung

$$\text{Tang.}^3 H + B \text{ Tang. } H - BC = 0$$

Wenn man diese Gleichung durch Tang. $H - c$ dividirt, so findet man, wenn der Ueberrest, der Voraussetzung zu Folge, weggelassen wird, den andern Factor

$$\text{Tang.}^2 H + c \text{ Tang. } H + B + c^2$$

Demnach

Demnach $\frac{2pdx}{K^2} =$

$$\frac{Bd\,\text{Tang.}\,H}{(\text{Tang.}\,H - c)(\text{Tang.}^2 H + c\,\text{Tang.}\,H + B + c^2)}$$

Das zweite Glied dieser Gleichung kann man in die beede Brüche

$$\frac{Dd\,\text{Tang.}\,H}{\text{Tang.}\,H - c}$$

und

$$\frac{E\,\text{Tang.}\,H\,d\,\text{Tang.}\,H + Fd\,\text{Tang.}\,H}{\text{Tang.}^2 H + c\,\text{Tang.}\,H + B + c^2}$$

zerlegen und man findet leicht

$E = -D$, $F = -2Dc$ und

$$D = \frac{B}{B + 3c^2}$$

Daraus folgt $\frac{2pdx}{K^2} = \frac{Dd\,\text{Tang.}\,H}{\text{Tang.}\,H - c} -$

$$\left[\frac{D\,\text{Tang.}\,H\,d\,\text{Tang.}\,H + 2Dcd\,\text{Tang.}\,H}{\text{Tang.}^2 H + c\,\text{Tang.}\,H + B + c^2}\right]$$

oder $\frac{2pdx}{DK^2} = \frac{d\,\text{Tang.}\,H}{\text{Tang.}\,H - c} -$

$$\left[\frac{\text{Tang.}\,H\,d\,\text{Tang.}\,H + 2cd\,\text{Tang.}\,H}{\text{Tang.}^2 H + c\,\text{Tang.}\,H + B + c^2}\right]$$

$$= \frac{d\,\text{Tang.}\,H}{\text{Tang.}\,H - c} - \frac{1}{2}\left[\frac{2\,\text{Tang.}\,H\,d\,\text{Tang.}\,H + cd\,\text{Tang.}\,H}{\text{Tang.}^2 H + c\,\text{Tang.}\,H + B + c^2}\right]$$

$$\frac{-\frac{3c}{2}\,d\,\text{Tang.}\,H}{\text{Tang.}^2 H + c\,\text{Tang.}\,H + B + c^2}$$

Die zwei erste Glieder sind augenscheinlich logarithmische Differenzialien, welche sich leicht integriren lassen. Um das dritte Glied integriren zu können, setze man

Tang. $H + \frac{1}{2}c = z$; $B + \frac{3}{4}c^2 = ff$ und $z = fz'$; so verwandelt sich dasselbe in

$$-\frac{3}{2} \times \frac{c}{f} \times \frac{dz'}{z'z'+1}$$

welches das Differenziale eines Kreis-Bogens ist, dessen Halbmesser = 1 und dessen Tangente

$$= z' = \frac{z}{f} = \frac{\text{Tang. H} + \frac{1}{2}c}{f}$$

Wenn man also integrirt; so findet man

$$\frac{2px}{DK^2} = \text{Log.}(\text{Tang. H} - c) -$$
$$\frac{1}{2}\text{Log.}(\text{Tang.}^2\ \text{H} + c\ \text{Tang. H} + B + c^2)$$
$$- \frac{3c}{2f}\ arc\ \text{Tang.}\left(\frac{\text{Tang. H} + \frac{1}{2}c}{f}\right) + C'$$

oder, wenn man die beständige Grösse C' aus der Bedingung bestimmt, daß $x = 0$, wenn H $= I$ und dabei bemerkt, daß

$$\text{Tang.}^2\ \text{H} + c\ \text{Tang. H} + B + c^2 =$$
$$(\text{Tang. H} + \tfrac{1}{2}c)^2 + ff =$$
$$ff\left[\left(\frac{\text{Tang. H} + \frac{1}{2}c}{f}\right)^2 + 1\right]$$; so findet man

$$\frac{2px}{DK^2} = \text{Log.}\left[\frac{\text{Tang. H} - c}{\text{Tang. } I - c}\right] -$$
$$\frac{1}{2}\text{Log.}\left[\frac{\left(\frac{\text{Tang. H} + \frac{1}{2}c}{f}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\text{Tang. } I + \frac{1}{2}c}{f}\right)^2 + 1}\right]$$

— 3c

$$- \frac{3c}{2f} \left[arc\,\text{Tang.} \left(\frac{\text{Tang. H} + \frac{1}{2}c}{f} \right) \right.$$

$$\left. - arc\,\text{Tang.} \left(\frac{\text{Tang.}\, I + \frac{1}{2}c}{f} \right) \right]$$

§. 109.

Den Wert von y findet man folgendergestalt.

Es ist $\frac{dy}{dx} = \text{Tang. H}$; daher

$dy = dx\,\text{Tang. H}$

und

$$\frac{2pdy}{K^2} = \frac{D\,\text{Tang. H}\; d\,\text{Tang. H}}{\text{Tang. H} - c} -$$

$$\frac{D\text{Tang.}^2\text{H}\; d\text{Tang. H} - 2Dc\,\text{Tang. H}\; d\text{Tang. H}}{\text{Tang.}^2\,\text{H} + c\,\text{Tang. H} + B + c^2}$$

oder

$$\frac{2pdy}{DK^2} = \frac{cd\,\text{Tang. H}}{\text{Tang. H} - c} -$$

$$\frac{c\text{Tang. H}\; d\,\text{Tang. H} + c^2 d\,\text{Tang. H} + Bd\,\text{Tang. H}}{\text{Tang.}^2\,\text{H} + c\,\text{Tang. H} + B + c^2}$$

$$= \frac{cd\,\text{Tang. H}}{\text{Tang.H} - c} -$$

$$\left[\frac{c\text{Tang. H}\, d\text{Tang.H} - c^2 d\text{Tang.H} - Bd\,\text{Tang.H}}{\text{Tang.}^2\text{H} + c\text{Tang. H} + B + c^2} \right]$$

$$= \frac{cd\,\text{Tang. H}}{\text{Tang. H} - c} -$$

$$\tfrac{1}{2} \left[\frac{2c\text{Tang.H}d\text{Tang.H} - 2c^2 d\text{Tg. H} - 2Bd\,\text{Tg.H}}{\text{Tang.}^2\text{H} + c\,\text{Tang. H} + B + c^2} \right]$$

$= cd$

$$= \frac{cd\,\mathrm{Tang.H}}{\mathrm{Tang.H} - c} -$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2c\,\mathrm{T.H}\,d\mathrm{T.H} + c^2 d\mathrm{T.H} - 3c^2 d\mathrm{T.H} - 2Bd\mathrm{T.H}}{\mathrm{Tang.}^2\,\mathrm{H} + c\,\mathrm{Tang.\,H} + B + c^2}\right]$$

$$= \frac{cd\,\mathrm{Tang.\,H}}{\mathrm{Tang.\,H} - c} -$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2c\,\mathrm{Tang.\,H}\ d\mathrm{Tang.\,H} + c^2 d\,\mathrm{Tang.\,H}}{\mathrm{Tang.}^2\,\mathrm{H} + c\,\mathrm{Tang.\,H} + B + c^2}\right]$$

$$\frac{-\left(B \mp \frac{3c^2}{2}\right) d\,\mathrm{Tang.\,H}}{\mathrm{Tang.}^2\,\mathrm{H} + c\,\mathrm{Tang.\,H} + B + c^2}.$$

Und wenn man mit dieser Gleichung eben so verfährt, wie man mit dem Wert von dx verfahren ist, so erhält man endlich:

$$\frac{2py}{DK^2} = c\,\mathrm{Log.}\left[\frac{\mathrm{Tang.\,H} - c}{\mathrm{Tang.}\,I - c}\right] -$$

$$\frac{1}{2}c\,\mathrm{Log.}\left[\frac{\left(\frac{\mathrm{Tang.\,H} + \frac{1}{2}c}{f}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\mathrm{Tang.}\,I + \frac{1}{2}c}{f}\right)^2 + 1}\right]$$

$$+ \left(\frac{B + \frac{3}{2}c^2}{f}\right)\left(arc\,\mathrm{Tang.}\left(\frac{\mathrm{Tang.H} + \frac{1}{2}c}{f}\right) -\right.$$

$$\left. arc\,\mathrm{Tang.}\left(\frac{\mathrm{Tang}\,I + \frac{1}{2}c}{f}\right)\right).$$

Wenn man also für H einen beliebigen Wert annimmt und denselben in die eben gefundene Gleichungen sezt; so findet man die korrespondirende Werte von y und x.

Und,

Und, um die Schußweite zu erhalten, setze man in die lezte Gleichung nach und nach für H verneinte Werte, bis man einen findet, wodurch $y = 0$ wird. Alsdenn setze man eben diesen Wert von H in die Gleichung von x; so findet man die Schußweite.

§. 110.

Man kann aber die Gleichungen von x und y auf folgende Art weit einfacher einrichten.

Es sey M der Bogen, dessen Tangente $= \frac{\text{Tang. H} + \frac{1}{2}c}{f}$ und M' der Bogen, dessen Tangente $= \frac{\text{Tang.}\, I + \frac{1}{2}c}{f}$; so ist

$$\text{arc Tang.} \left(\frac{\text{Tang. H} + \frac{1}{2}c}{f}\right) = M$$

und mithin

$$\frac{\text{Tang. H} + \frac{1}{2}c}{f} = \text{Tang.}\, M$$

also $\text{Tang. H} = f\ \text{Tang.}\, M - \frac{1}{2}c.$

Auf eben die Art findet man

$$\text{Tang.}\, I = f\,\text{Tang.}\, M' - \frac{1}{2}c.$$

Sezt man diese Werte in die Gleichung von x; so findet man

$$\frac{2px}{DK^2} = \text{Log.} \left[\frac{f\ \text{Tang.}\, M - \frac{3c}{2}}{f\ \text{Tang}\, M' - \frac{3c}{2}}\right] -$$

$\frac{1}{2}$Log.

$$\tfrac{1}{2}\text{Log.}\ \frac{\text{Tang.}^2 M + 1}{\text{Tang.}^2 M' + 1} - \frac{3c}{2f}(M - M')$$

Es sey $f = \frac{3c}{2}$ Tang. L.

Wenn man bemerkt, daß

$$\frac{\text{Sin.}\ A}{\text{Cosin.}\ A} = \text{Tang.}\ A$$

$$\text{Cosin.}\ A\ \text{Cosin.}\ B - \text{Sin.}\ A\ \text{Sin.}\ B =$$

Cosin. $(A + B)$; so findet man $\frac{2px}{DK^2} =$

$$\text{Log.}\left[\frac{\text{Cosin.}\ (M + L)}{\text{Cosin.}\ (M' + L)}\right] \times \frac{\text{Cosin.}\ M'}{\text{Cosin.}\ M}$$

$$- \tfrac{1}{2}\text{Log.}\ \frac{\text{Cos.}^2 M'}{\text{Cos.}^2 M} - \tfrac{3}{2} \times \frac{c}{f}\ (M - M')$$

oder

$$\frac{2px}{DK^2} = \text{Log.}\ \frac{\text{Cosin.}\ (M + L)}{\text{Cosin.}\ (M' + L)} -$$

$\tfrac{3}{2} \times \frac{c}{f}\ (M - M')$ und auf eine ähnliche Art findet man

$$\frac{2py}{DK^2} = c\ \text{Log.}\ \frac{\text{Cosin.}\ (M + L)}{\text{Cosin.}\ (M' + L)} -$$

$$\frac{B + \tfrac{3}{2}c^2}{f}(M - M')$$

§. 111.

Den Buchstaben c findet man aus der Gleichung

$$\text{Tang.}^3 H + B\ \text{Tang.}\ H - BC = 0,$$

f aus

f aus der Gleichung

$$B + \tfrac{3}{4}c^2 = ff$$

L aus der Gleichung

$$\text{Tang.}\,L = \frac{f}{\frac{3c}{2}},$$

M aus der Gleichung

$$\text{Tang.}\,M = \frac{\text{Tang.}\,H + \frac{1}{2}c}{f}$$

Endlich M' aus der Gleichung

$$\text{Tang.}\,M' = \frac{\text{Tang.}\,I + \frac{1}{2}c}{f}$$

Wenn man M und M' in Graden und Minuten gefunden; so findet man ihre absolute Werte, wenn man ihre Werte, in Minuten ausgedrukt, mit 0,0002908882, welches die Länge eines Bogens von einer Minute ist, multiplizirt. Oder, wenn man zu den Logarithmen der Werte von M und M', welche in Minuten ausgedrukt sind, den beständigen Logarithmus 6.4637261 addirt; so findet man den Logarithmum des absoluten Wertes von M und M'.

§. 112.

Aus dem, was wir in dem 84 §phen gelehrt haben, erhellet leicht, wie man auch bei dieser zweiten Methode die veränderliche Dichtigkeit der Luft in Berechnung bringen könne.

Man setze

$$\frac{K^2}{2p} = \frac{1}{2D}$$

und

$$\frac{-\frac{1}{2D}\,d\,\text{Tang.}\,H}{C-\text{Tang.}H\left[\frac{1}{2}\text{Sec.}H+\frac{1}{2}\text{Cot.}H\,\text{Log.T.}\left(45^\circ+\frac{1}{2}H\right)\right]}$$

$$=\frac{-d\ \text{Tang.}\ H}{A-B\ \text{Tang.}\ H-E\ \text{Tang.}^3\ H}$$

Die Grössen A, B, E findet man aus den drey Gleichungen

$$\frac{1}{2D(C-a\,\text{Tang.}I)}=\frac{1}{A-B\text{Tang.}I-E\text{Tang.}^3 I}$$

$$\frac{1}{2D'C}=\frac{1}{A}$$

und

$$\frac{1}{2D(C+a'\text{Tang.}I')}=\frac{1}{A+B\ \text{Tang.}I'+E\,\text{Tg.}^3 I'}$$

wo $\frac{1}{2D'}$ der Wert von $\frac{K^2}{2p}$ im Scheidelpunkt der krummen Linie und $\frac{1}{2D}$ der Wert von $\frac{K^2}{2p}$ im Wurfs, und Einfallspunkt ist.

§. 113.

Wir sehen hieraus, daß man bei dieser zweiten Methode nicht nöthig habe, die Schußweite des auf- und niedersteigenden Asts, jede besonders zu berechnen, wenn man die veränderliche Dichtigkeit der Luft in Betrachtung ziehen will.

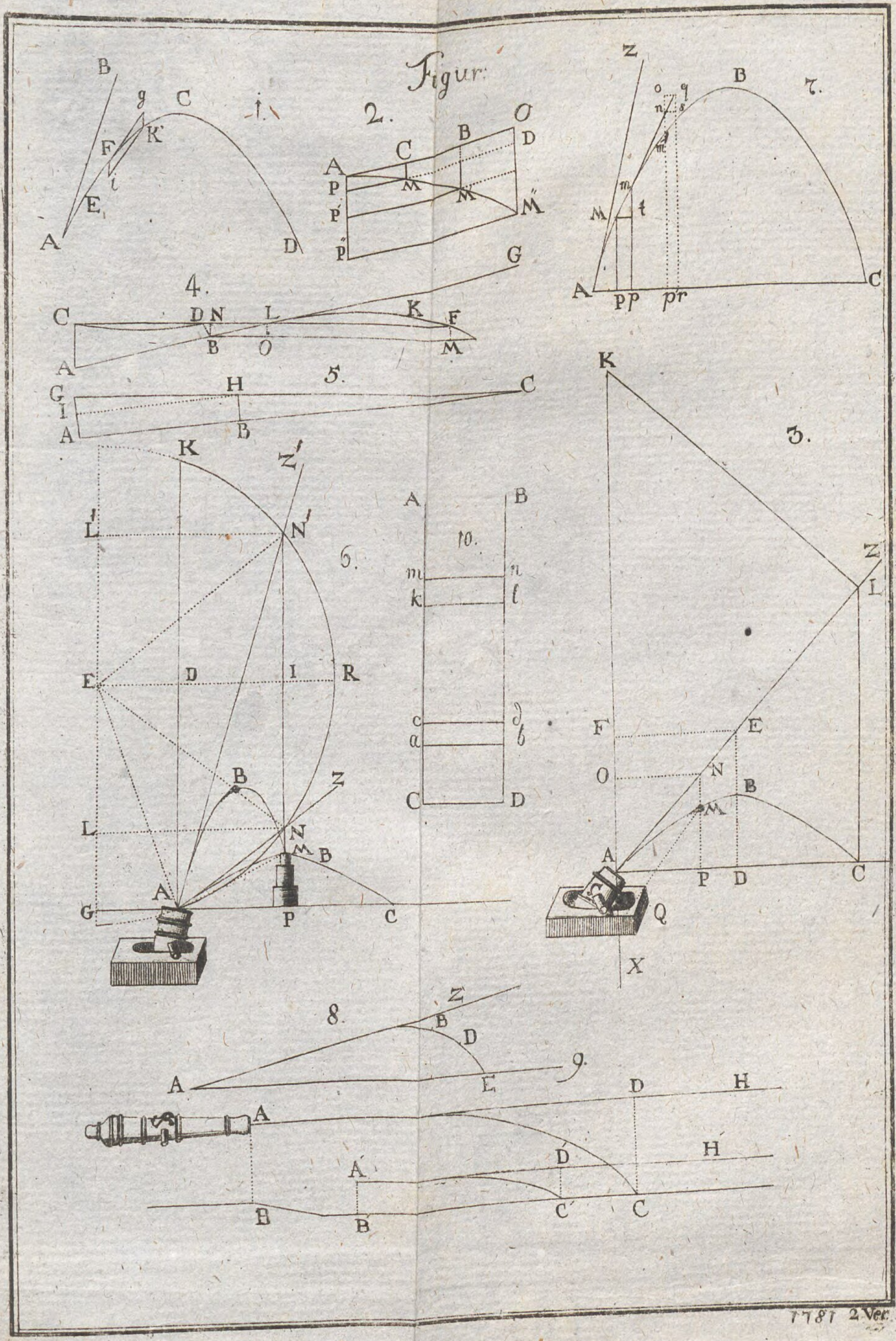
§. 114.

Von den Versuchen, welche bisher gemacht worden sind, die Natur der krummen Linie zu bestim-

stimmen, welche Kanon-Kugeln und Bomben in ihrer Bahn beschreiben, verdient besonders die Abhandlung des Ritters de Borda, welche in den Memoires de l' Academie des Sciences de Paris, année 1769, stehet, hier angeführt zu werden. Dieser Gelehrte behandelt den nehmlichen Gegenstand nach einer sehr scharfsinnigen Methode, welche aber von den beiden hier angeführten Methoden völlig verschieden ist. Da ich seine Berechnungen mit Versuchen nicht verglichen habe; so kann ich nicht sagen, wie genau man, durch die Methode des Ritters de Borda, die Schußweiten finde. Indessen haben die hier vorgetragene Methoden zwo ihnen eigene Vorzüge, welche darin bestehen 1) daß man die Schußweiten berechnen kann, ohne genöthiget zu seyn, die Schußweite der auf- und niedersteigenden Bahn, je besonders zu berechnen und 2) daß man die Grenzen der Schußweiten angeben kann, welches bei solchen Näherungs-Methoden nothwendig zu seyn scheint, wenn man sich von der Genauigkeit des Verfahrens versichern will.

Druckfehler.

pag.	Zeile	statt	lese man
6	24	V^2 $2p$	$\frac{V^2}{2p}$
18	1	$2 \mathrm{Cos.}\, a - 1$	$2 \mathrm{Cosin.}^2 a - 1$
30	12	$dx\sqrt{\left(\frac{1 + dy^2}{dx^2}\right)}$	$dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$
30	14	$\sqrt{\left(\frac{1 + dy^2}{dx^2}\right)}$	$\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$
43	12	Schaidelpunkt	Scheidelpunkt
46	4	$2px$ K^2	$\frac{2px}{K^2}$
76	6	dessen	diesen.



Figur:
1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
1781 2 Ver.

Tabelle,

in welcher für Erhöhungs-Winkel von 1° – 90° der Wert von a. angegeben wird.

Grade.	Wert von a.	Grade.	Wert von a.	Grade.	Wert von a.	Grade.	Wert von a.	Grade.	Wert von a.
0.	1. 00000.	19.	1. 01942.	37.	1. 08787.	55.	1. 27583.	73.	2. 00071.
1.	1. 00005.	20.	1. 02165.	38.	1. 09400.	56.	1. 29381.	74.	2. 09531.
2.	1. 00020.	21.	1. 02404.	39.	1. 10001.	57.	1. 31310.	75.	2. 20349.
3.	1. 00045.	22.	1. 02657.	40.	1. 10730.	58.	1. 33382.	76.	2. 32824.
4.	1. 00081.	23.	1. 02926.	41.	1. 11452.	59.	1. 35612.	77.	2. 47344.
5.	1. 00127.	24.	1. 03212.	42.	1. 12215.	60.	1. 38017.	78.	2. 64428.
6.	1. 00184.	25.	1. 03514.	43.	1. 13022.	61.	1. 40616.	79.	2. 84788.
7.	1. 00251.	26.	1. 03834.	44.	1. 13875.	62.	1. 43429.	80.	3. 09418.
8.	1. 00328.	27.	1. 04172.	45.	1. 14777.	63.	1. 46484.	81.	3. 39753.
9.	1. 00417.	28.	1. 04530.	46.	1. 15741.	64.	1. 49807.	82.	3. 77960.
10.	1. 00516.	29.	1. 04907.	47.	1. 16752.	65.	1. 53433.	83.	4. 27430.
11.	1. 00626.	30.	1. 05306.	48.	1. 17826.	66.	1. 57402.	84.	4. 93833.
12.	1. 00748.	31.	1. 05727.	49.	1. 18973.	67.	1. 61759.	85.	5. 87383.
13.	1. 00881.	32.	1. 06171.	50.	1. 20189.	68.	1. 66562.	86.	7. 28508.
14.	1. 00912.	33.	1. 06640.	51.	1. 21483.	69.	1. 71872.	87.	9. 90478.
15.	1. 01184.	34.	1. 07134.	52.	1. 22862.	70.	1. 77772.	88.	14. 39754.
16.	1. 01354.	35.	1. 07596.	53.	1. 24333.	71.	1. 84355.	89.	28. 69102.
17.	1. 01536.	36.	1. 08206.	54.	1. 25903.	72.	1. 91740.	90.	unendlich.
18.	1. 01732.								

Tabelle,

über die Wurfsweiten der Bomben, welche 1.) nach der parabolischen Theorie, 2.) nach der Theorie des Widerstandes berechnet und mit den in den Versuchen beobachteten Schußweiten verglichen werden.

Erhöhungs-Winkel.	Berechnete Wurfsweiten.		Beobachtete Wurfsweiten.	Zeiten, in welchen die Bombe ihre Bahnen vollendet.			Einfalls-Winkel.
	nach der parabolischen Theorie.	nach der Theorie des Widerstandes.		nach der parabolischen Theorie.	nach der Theorie des Widerstandes.	nach den Versuchen.	
Grad.	Toißen.	Toißen.		Sekunden.	Sekunden.	Sekunden.	Grad.
10.	253.	227.	257. 249. 221. 228.	$4\frac{1}{5}$.	$4\frac{1}{20}$.	4.	14.
20.	476.	396.	440. 424. 394. 398.	$8\frac{3}{10}$.	8.	$7\frac{1}{3}$.	26.
30.	640.	500.	451. 516. 537. 492.	$12\frac{1}{5}$.	$11\frac{3}{10}$.	$10\frac{3}{4}$.	36.
40.	728.	547.	569. 575. 574. 544. 577.	$15\frac{3}{5}$.	$14\frac{2}{5}$.	$14\frac{2}{3}$.	48.
43.	738.	549.	506. 517. 543. 509. 544.	$16\frac{1}{2}$.	$15\frac{1}{5}$.	14.	$50\frac{1}{2}$.
45.	739.	547.	490. 536. 505. 489. 554.	$17\frac{1}{5}$.	$15\frac{4}{5}$.	$15\frac{1}{5}$.	$52\frac{2}{3}$.
50.	728.	534.	481. 512. 488. 507.	$18\frac{3}{5}$.	$16\frac{9}{10}$.	16.	$57\frac{1}{2}$.
60.	640.	467.	457. 424. 457. 448.	21.	$19\frac{3}{10}$.	$19\frac{1}{3}$.	68.
70.	476.	348.	349. 297. 349. 328.	$22\frac{4}{5}$.	$20\frac{7}{10}$.	22.	74.
75.	370.	277.	298. 265. 261. 256.	$23\frac{2}{5}$.	$21\frac{7}{10}$.	22.	78.

Tabelle.

Ueber die Schußweiten der 24pfündigen Kugel, welche 1.) nach der parabolischen Theorie, 2.) in der Voraussetzung einer unveränderlichen Dichtigkeit der Luft, 3.) in der Voraussetzung einer veränderlichen Dichtigkeit der Luft berechnet worden sind, und mit den in den Versuchen zu La Fére beobachteten Schußweiten verglichen werden.

Erhöhungs-Winkel.	Schußweiten.				Höhen, auf welche die Kugeln gestiegen.			Zeiten, in welchen die Kugel ihre Bahnen vollendet.			Einfalls-Winkel.
	nach der parabolischen Theorie.	bey unveränderter Dichtigkeit der Luft.	bei veränderlicher Dichtigkeit.	nach der Erfahrung.	nach der parabolischen Theorie.	bei unveränderlicher Dichtigkeit der Luft.	bei veränderlicher Dichtigkeit.	nach der parabolischen Theorie.	nach der Theorie des Widerstandes.	nach der Erfahrung.	
Grad.	Toißen.	Toißen.	Toißen.	Toißen.	Toißen.	Toißen.	Toißen.	Sekunden.	Sekunden.	Sekunden.	Grad.
5.	1526.	896.	902.	927. 910. 898. 946.	33.	25.	25.	$7\frac{3}{10}$.	$6\frac{21}{10}$.	7.	$8\frac{1}{2}$.
10.	3005.	1295.	1313.	1273. 1218. 1237. 1199.	133.	80.	81.	$14\frac{1}{2}$.	$10\frac{4}{5}$.	$10\frac{1}{4}$.	18.
15.	4393.	1531.	1575.	1588. 1669. 1650. 1495.	294.	155.	158.	$21\frac{3}{5}$.	$14\frac{3}{5}$.	$15\frac{1}{4}$.	32.
20.	5644.	1714.	1774.	1636. 1689. 1783. 1796.	514.	243.	267.	$28\frac{3}{5}$.	$18\frac{7}{10}$.	19.	42.
25.	6730.	1823.	1884.	1740. 1766. 1805. 1909.	784.	342.	361.	$35\frac{3}{10}$.	22.	20.	50.
30.	7609.	1889.	1965.	1945. 1843. 2030. 1877.	1098.	447.	475.	$41\frac{3}{5}$.	$25\frac{1}{5}$.	$24\frac{1}{2}$.	58.
35.	8274.	1917.	2040.	1871. 1960. 1852. 1839.	1445.	560.	609.	$47\frac{9}{10}$.	28.	27.	64.
40.	8653.	1913.	2024.	2023. 2001. 1913. 1851. 1967.	1816.	677.	737.	$53\frac{7}{10}$.	$30\frac{4}{5}$.	$32\frac{4}{5}$.	68.
43.	8764.	1896.	2001.	2210. 2163. 2146. 2221. 2176.	2044.	750.	823.	57.	$32\frac{2}{10}$.	34.	70.
45.	8786.	1879.	1984.	2094. 2040. 2167. 2032. 1955.	2197.	798.	882.	$59\frac{1}{10}$.	$33\frac{2}{5}$.	34.	72.
50.	8653.	1813.	1893.	2000. 1980. 1972. 1952.	2578.	929.	1036.	64.	$35\frac{4}{5}$.	36.	75.
60.	7609.	1581.	1646.	1689. 1584. 1766. 1487.	3295.	1173.	1358.	$72\frac{2}{5}$.	$40\frac{1}{5}$.	$43\frac{1}{2}$	81.
70.	5644.	1202.	1211.	1123. 1271. 1351. 1194.	3879.	1350.	1668.	$78\frac{1}{2}$.	44.	46.	83.
75.	4393.	932.	937.	885. 882. 917. 910.	4099.	1522.	1832.	$80\frac{7}{10}$.	$45\frac{1}{2}$.	$48\frac{3}{4}$.	84.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bézout, Étienne,

Ueber die Kugel-Bahn Nebst I. Kupfertafel

Stutgart 1782

Math.a. 24
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080536-2
VD18 11429941